

COMPLEXE GETALLEN

voor Wiskunde D

Jan van de Craats

Herziene versie, 6 augustus 2008

Illustraties en L^AT_EX-opmaak: Jan van de Craats

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit

Copyright © 2007 Jan van de Craats

All rights reserved.
Alle rechten voorbehouden.

Belangstellenden kunnen dit e-boek gratis downloaden vanaf de homepage van de auteur: www.science.uva.nl/~craats. Daar wordt ook een lijst van errata en wijzingen bijgehouden.

Leeswijzer

Wiskunde leer je vooral door veel te oefenen. De meeste hoofdstukken van dit boek beginnen daarom met opgaven op de linkerpagina. Je kunt er direct mee aan de slag en zodra je een opgave gemaakt hebt, kun je je antwoord achterin controleren.

Op de rechterbladzijden staat de theorie die je nodig hebt om de opgaven links te kunnen maken. Je kunt daar naar behoefte gebruik van maken. Kom je termen of begrippen tegen die daar niet verklaard worden, dan kun je via het trefwoordenregister dat achterin het boek staat, de plaats vinden waar die uitleg wél staat. Achterin is ook een formuleoverzicht opgenomen.

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

Voorkennis en hulpmiddelen

De voorkennis die je bij dit boek nodig hebt, bestaat hoofdzakelijk uit algebra (letterrekenen), met name vaardigheid in het werken met tweedegraadsvergelijkingen en de *abc*-formule. Verder moet je bekend zijn met radialen voor hoekmeting, de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens en de *e*-machtfunctie. Als je hoofdstuk 5 gaat bestuderen, moet je ook iets weten over differentiaalrekening.

Een rekenmachine met grafische mogelijkheden heb je niet nodig; een gewone rekenmachine met daarop wortels, *e*-machten en goniometrische en inverse goniometrische functies (sinus, cosinus, tangens, arctangens) is voldoende. Maar bij het merendeel van de opgaven is helemaal geen rekenmachine nodig.

De benodigde voorkennis is allemaal vwo-B-stof, en dus te vinden in de schoolboeken. In een bijlage (bladzijde 65 en verder) vind je een korte samenvatting van die voorkennis. Die teksten zijn grotendeels ontleend aan het *Basisboek wiskunde* van Jan van de Craats en Rob Bosch (Pearson Education Benelux, 2005, ISBN 90-430-1156-8). Daarin vind je desgewenst ook meer details en een grote collectie oefenopgaven. Op mijn homepage (www.science.uva.nl/~craats) kun je ter kennismaking grote delen van dat boek raadplegen.

Het Griekse alfabet

α	A	alfa	ι	I	jota	ρ	P	rho
β	B	bèta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mu	υ	Y	upsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	nu	φ	Φ	phi
ζ	Z	zèta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	èta	\omicron	O	omicron	ψ	Ψ	psi
θ	Θ	thèta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Inhoudsopgave

Voorwoord	1
1 Rekenen met complexe getallen	4
Wortels uit negatieve getallen	5
De abc -formule	5
Het complexe vlak	7
Vermenigvuldigen en delen	9
Samenvatting	10
2 De meetkunde van het complexe rekenen	12
Complexe getallen als vectoren	13
Complexe getallen op de eenheidscirkel	15
De formules van Euler	17
De (r, φ) -notatie voor complexe getallen	19
De complexe functies e^z , $\cos z$ en $\sin z$	21
Samenvatting	22
3 Wortels en polynomen	24
Wat zijn complexe n -demachtswortels?	25
Waarom wortels meerwaardig zijn	27
Over n -demachtswortels en n -degraadspolynomen	29
De hoofdstelling van de algebra	31
Reële polynomen	33
Samenvatting	34
4 Lineaire recursies	36
Recursief gedefinieerde rijen	37
Lineaire recursies van orde 2	39
De rij van Fibonacci	41
Een oscillerende rij	43
Een oscillerende rij (vervolg)	45
Samenvallende wortels	47
Lineaire recursies van hogere orde	49
Realistische modellen	49
Een economisch voorbeeld	51
Samenvatting	52

5	Lineaire differentiaalvergelijkingen	54
	Inleiding	55
	Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 2	57
	Positieve discriminant	59
	Discriminant nul	59
	Negatieve discriminant	61
	Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde	63
	Realistische modellen	63
	Samenvatting	64
	Voorkennis	65
	Hoekmeting	65
	De sinus, de cosinus en de tangens	66
	Grafieken van goniometrische functies	67
	Optelformules en dubbele-hoekformules	67
	Exponentiële functies en de e-macht	68
	Raaklijn en afgeleide	69
	Gonio gemakkelijk gemaakt	70
	Antwoorden	71
	Trefwoordenregister	77

Voorwoord

Complexe getallen worden in vrijwel alle toepassingen van de wiskunde gebruikt. Met name in de bètavakken, de techniek, de informatica en de econometrie. Je komt ze bijvoorbeeld tegen in de electrotechniek, de mechanica, de theoretische natuurkunde, de regeltechniek en de systeemtheorie, maar ook in de theorie van micro- en macro-economische modellen. In veel van de ons omringende landen is het onderwerp complexe getallen daarom een onderdeel van het middelbare-schoolcurriculum in de B-richtingen. Ook in ons land zou dat een goede zaak zijn. Zo ver zijn we nog niet, maar in het nieuwe vak Wiskunde D voor vwo is complexe getallen wel een aanbevolen keuze-onderwerp. Dit boek is bedoeld als studiemateriaal daarbij.

Rekenen en toepassingen

In de eerste drie hoofdstukken worden de basisprincipes van het rekenen met complexe getallen uitgelegd. De hoofdstukken 4 en 5 geven toepassingen op het gebied van de lineaire recurrente betrekkingen en de lineaire differentiaalvergelijkingen, onderwerpen die van belang zijn voor de economie, de econometrie, de exacte vakken en de techniek. Ze kunnen onafhankelijk van elkaar worden gelezen; wie ze allebei bekijkt, zal het opvallen dat de gebruikte methodes voor een groot deel overeenstemmen.

Spannende formules

Als je met complexe getallen gaat werken, kom je mysterieuze zaken tegen. Je ontdekt dan bijvoorbeeld dat $\sqrt{-37}$ een getal is waar je echt mee kunt rekenen. En dat een vierkantsvergelijking met een negatieve discriminant toch twee oplossingen heeft. Je leert ook dat elk complex getal precies zeven zevendemachtswortels heeft. Je maakt kennis met $i^2 = -1$ en met andere spannende formules zoals

$$e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{of} \quad e^{\pi i} + 1 = 0$$

Rekenen in het complexe vlak

Complexe getallen zijn mysterieus, zeker voor de niet-ingewijde. Maar niet zo mysterieus dat je er niets bij voor kunt stellen. Want net zoals je je reële getallen kunt voorstellen als punten op een lijn (de reële getallenlijn), zo kun je je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak: het complexe vlak. Daar-

mee krijgen complexe getallen een meetkundige betekenis die het rekenen ermee aanschouwelijk maakt en daardoor enorm verduidelijkt.

Hoofdttekst en toepassingen

De hoofdttekst van dit boek bestaat uit de hoofdstukken 1, 2 en 3. Iedereen die iets van complexe getallen wil weten, moet dat gedeelte, inclusief de opgaven, volledig doorwerken. De hoofdstukken 4 en 5 leggen daarna de wiskundige basis voor allerlei toepassingen die zowel voor de economische als voor de bèta-vervolgopleidingen van groot belang zijn. Maar bovendien zijn het mooie, afgeronde stukken wiskunde met een duidelijke probleemstelling en een volledige uitwerking. Ik geef in de tekst echter alleen maar een hint van enige toepassingsgebieden. De toepassingen zelf laat ik aan de vervolgopleidingen over. Deze hoofdstukken zijn zeer geschikt om als basis te dienen voor een praktische opdracht of een profielwerkstuk.

Bij deze herziene versie

Op eerdere versies van deze tekst heb ik veel reacties gehad van docenten en andere belangstellenden. Naar aanleiding daarvan heb ik een ingrijpende revisie uitgevoerd: het oorspronkelijke hoofdstuk 2 is volledig herschreven en de andere hoofdstukken zijn op kleine punten aangepast. Alle hoofdstukken worden nu afgesloten met een samenvatting, en er is een bijlage toegevoegd met de belangrijkste resultaten (allemaal vwo-B stof) die als voorkennis bekend worden verondersteld. De Toegiften zijn geschrapt. Een aantal foutieve antwoorden is gecorrigeerd.

Dankbetuiging

Op gevaar af anderen tekort te doen wil ik graag de volgende personen voor hun commentaar bedanken: Rob Bosch, Jan Brinkhuis, Peter de Paepe, Rinse Poortinga, Joke Zwarteveen, Martijn Groothuis, Cees van Wijk, Kees Verheule, Johan Landwehr, Cécile Heesterman, Mieke Thijsseling, Derk Pik, P. de Haan en René Richard van Hassel. Een boek als dit zal pas na lange tijd een ideale vorm bereiken. Ik houd me daarom graag aanbevolen voor elk commentaar, en natuurlijk ook voor het signaleren van fouten in de antwoorden. Mijn e-mailadres is te vinden op mijn homepage. In de internetversie van dit boek worden correcties direct doorgevoerd. Op de titelpagina staat de datum van de laatste wijziging. Op mijn homepage wordt een lijst met errata en wijzigingen, telkens met de bijbehorende datum, bijgehouden.

Oosterhout, augustus 2007, Jan van de Craats
homepage: www.science.uva.nl/~craats

1 Rekenen met complexe getallen

In dit hoofdstuk leer je rekenen met complexe getallen. Ze vormen een getallensysteem dat een uitbreiding is van het bekende systeem van de reële getallen. Je leert ook hoe je complexe getallen kunt voorstellen als punten in het vlak. Maar voor complexe getallen gebruiken we niet de gewone vlakke coördinaten (x, y) maar een nieuwe notatievorm: $z = x + iy$. Met deze nieuwe notatie wordt rekenen met complexe getallen een eenvoudige zaak. Je leert hoe je daarmee complexe getallen moet optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

1

Rekenen met complexe getallen

1.1 Bereken:

- $(3i)^2$
- $(-3i)^2$
- $-(4i)^2$
- $(-i)^3$
- i^4

1.2 Bereken:

- $(\frac{1}{2}\sqrt{2}i)^2$
- $(-\frac{1}{3}\sqrt{6}i)^2$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{4}i)^2$
- $(\frac{2}{3}\sqrt{3}i)^2$
- $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}i)^2$

Schrijf de volgende wortels in de vorm ri waarbij r een positief reëel getal is. Voorbeeld: $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$. Geef exacte antwoorden en vereenvoudig daarbij de wortels zo veel mogelijk (schrijf bijvoorbeeld $3\sqrt{3}$ in plaats van $\sqrt{27}$).

1.3

- $\sqrt{-3}$
- $\sqrt{-9}$
- $\sqrt{-8}$
- $\sqrt{-25}$
- $\sqrt{-15}$

1.4

- $\sqrt{-33}$
- $\sqrt{-49}$
- $\sqrt{-48}$
- $\sqrt{-45}$
- $\sqrt{-75}$

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op. Geef ook hier exacte antwoorden en vereenvoudig de wortels.

1.5

- $x^2 - 2x + 2 = 0$
- $x^2 + 4x + 5 = 0$
- $x^2 + 2x + 10 = 0$
- $x^2 - 6x + 10 = 0$
- $x^2 - 4x + 8 = 0$

1.6

- $x^2 - 12x + 40 = 0$
- $x^2 - 4x + 6 = 0$
- $x^2 + 2x + 4 = 0$
- $x^2 - 6x + 12 = 0$
- $x^2 + 8x + 20 = 0$

De volgende opgave is een echte puzzelsom. Kom je er niet uit, dan kun je achterin de oplossing bekijken. Maar eerst zelf proberen!

1.7 Bij het rekenen met wortels uit negatieve getallen moet je oppassen zoals blijkt uit de volgende paradoxale 'afleiding':

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Probeer de vinger te leggen op de wonde plek! Met andere woorden, welk van de vier gelijktekens is (of zijn) ten onrechte gezet, en waarom?

Wortels uit negatieve getallen

Op school leer je dat er geen getal x bestaat waarvoor $x^2 = -1$. Kwadraten zijn immers nooit negatief. Maar wat als we ons nu eens *indenken* dat er wél zo'n getal zou bestaan? Een getal, we noemen het "i" (van *imaginair*, dat wil zeggen denkbeeldig) waarvoor dus geldt dat

$$i^2 = -1$$

Je zou dat getal dan een *wortel uit* -1 kunnen noemen: $i = \sqrt{-1}$. Ook uit andere negatieve getallen kun je dan een wortel trekken als je de gewone rekenregels toepast. Zo is $6i$ een wortel uit -36 want $(6i)^2 = 6i \times 6i = 36 \times i^2 = 36 \times (-1) = -36$. Net zo kun je laten zien dat $\sqrt{-13} = \sqrt{13}i$, of dat $\sqrt{-12} = \sqrt{12}i = 2\sqrt{3}i$ (bedenk daarbij dat $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$).

Wat we eigenlijk hebben gedaan, is het bepalen van een oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$, waarbij a een positief getal is. We vonden $\sqrt{a}i$ als oplossing, maar natuurlijk is $-\sqrt{a}i$ dan ook een oplossing: $(-\sqrt{a}i)^2 = (-1)^2(\sqrt{a})^2 i^2 = 1 \cdot a \cdot (-1) = -a$. De volledige oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$ is dus $x = \pm\sqrt{a}i$.

De *abc*-formule

Als je een getal i hebt waarvoor $i^2 = -1$, kun je ook elke vierkantsvergelijking oplossen, zelfs als de discriminant negatief is. Bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 5 = 0$. Kijk maar:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Dit geeft $x+1 = \pm 2i$ oftewel $x = -1 + 2i$ of $x = -1 - 2i$.

Waar het op neer komt, is dat je gewoon de bekende *abc*-formule kunt toepassen. De oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ worden daarbij gegeven door

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als de discriminant $b^2 - 4ac$ negatief is, is $4ac - b^2$ positief, en dan geldt dus $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(4ac - b^2)(-1)} = \sqrt{4ac - b^2}i$. In het voorbeeld hierboven was $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ en $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, en dus geldt inderdaad

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

1 Rekenen met complexe getallen

Bereken de volgende complexe getallen, teken ze in in het complexe vlak en bereken hun absolute waarde.

1.8

- $(1 - 2i) + (3 - 4i)$
- $2i - (4 - 2i)$
- $(2 - 2i) + (-1 + 2i)$
- $(4 - 6i) - (1 - 3i)$
- $(2 - i) + (3 - 2i)$

1.10

- i^3
- i^4
- i^5
- i^{10}
- i^{2006}

1.9

- $(1 - 2i)(3 - 4i)$
- $2i(4 - 2i)$
- $(2 - 2i)(2 + 2i)$
- $(1 - 3i)^2$
- $(2 - i)^2$

1.11

- $(-i)^5$
- $(2i)^3$
- $(-2i)^7$
- $(1 + i)^3$
- $(1 - i)^3$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $\operatorname{Re}(z) = 5$ vormen samen de verticale lijn $x = 5$ in het complexe vlak. Teken de volgende lijnen in het complexe vlak.

1.12

- $\operatorname{Re}(z) = 4$
- $\operatorname{Re}(z) = -3$
- $\operatorname{Im}(z) = 2$
- $\operatorname{Im}(z) = -2$
- $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)$

1.13

- $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1$
- $\operatorname{Re}(z) = 2\operatorname{Im}(z)$
- $\operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z) = 1$
- $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 5$
- $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z| = 5$ vormen samen de cirkel met straal 5 en middelpunt 0. Ga zelf na dat alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z - 1| = 5$ samen de cirkel vormen met straal 5 en middelpunt 1. Teken nu de volgende cirkels in het complexe vlak en geef bij elke cirkel het middelpunt en de straal.

1.14

- $|z| = 4$
- $|z - 1| = 3$
- $|z - 2| = 2$
- $|z - 3| = 1$
- $|z + 1| = 5$

1.15

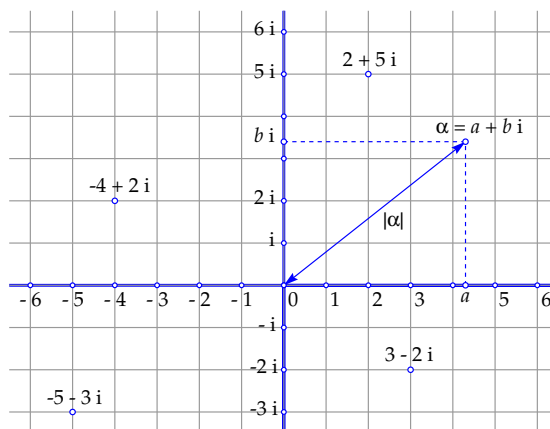
- $|z + 3| = 4$
- $|z - i| = 5$
- $|z + 2i| = 1$
- $|z - 1 - i| = 3$
- $|z + 3 - i| = 2$

Het complexe vlak

Bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen zijn we nu ook getallen van de vorm $a + b i$ tegengekomen. Ze heten *complexe getallen*. Bijvoorbeeld $-1 + 2 i$ of $3 - 5 i$. Je kunt zulke getallen bij elkaar *optellen*: $(-1 + 2 i) + (3 - 5 i) = 2 - 3 i$. Of van elkaar *aftrekken*: $(-1 + 2 i) - (3 - 5 i) = -4 + 7 i$. Of met elkaar *vermenigvuldigen*: $(-1 + 2 i)(3 - 5 i) = -3 + 5 i + 6 i - 10 i^2 = -3 + 11 i + 10 = 7 + 11 i$.

Gewoon haakjes uitwerken dus, en gebruiken dat $i^2 = -1$.

Een complex getal $a + b i$ ligt helemaal vast door de *twee reële getallen* a en b . Reële getallen kun je voorstellen als punten op een lijn, de *reële getallenlijn*. Op net zo'n manier kun je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak, het *complexe vlak*. Daarin moet dan eerst een coördinatenstelsel gekozen zijn. Het complexe getal $a + b i$ hoort dan bij het punt met de coördinaten (a, b) :



Voor de punten op de x -as is $b = 0$. In plaats van $a + 0 i$ schrijven we dan gewoon a . En voor de punten op de y -as geldt $a = 0$. Die schrijven we dan niet als $0 + b i$ maar gewoon als $b i$. En voor $1 i$ schrijven we natuurlijk gewoon i .

De x -as noemen we voortaan de *reële as* en de getallen daarop de *reële getallen*. De y -as heet de *imaginaire as* en de getallen daarop heten de *imaginaire getallen*. Complexe getallen worden vaak aangegeven met de letter z of met Griekse letters zoals α (alfa). We schrijven dan $z = x + y i$ of $\alpha = a + b i$.

Als $\alpha = a + b i$ een complex getal is, heet a het *reële deel*, notatie $a = \text{Re}(\alpha)$, en b het *imaginaire deel*, notatie $b = \text{Im}(\alpha)$. Het imaginaire deel is dus een reëel getal! Het getal $\sqrt{a^2 + b^2}$ heet de *absolute waarde* van α , notatie $|\alpha|$. In plaats van absolute waarde wordt ook vaak het woord *modulus* gebruikt. De absolute waarde van α is de afstand van α tot de oorsprong (stelling van Pythagoras). (Als α een reëel getal is, is $|\alpha|$ dus de gewone absolute waarde van α .)

1 Rekenen met complexe getallen

Bereken de volgende quotiënten van complexe getallen, dat wil zeggen schrijf elk quotiënt in de vorm $a + bi$ met a en b reëel.

1.16

a. $\frac{1}{3 - 4i}$

b. $\frac{3}{4 - 2i}$

c. $\frac{2 - 2i}{-1 + 2i}$

d. $\frac{4 - 6i}{1 - 3i}$

e. $\frac{2 - i}{3 - 2i}$

1.17

a. $\frac{1 - 2i}{3 + 4i}$

b. $\frac{2i}{1 - 2i}$

c. $\frac{1}{i}$

d. $\frac{1 - 3i}{i}$

e. $\frac{1 + i}{1 - i}$

1.18

a. $\frac{3i}{4 + 3i}$

b. $\frac{3 + i}{1 - 2i}$

c. $\frac{2 - i}{-1 + 2i}$

d. $\frac{2 - i}{1 + 2i}$

e. $\frac{1 + 2i}{2 - i}$

1.19

a. $\frac{1 - 2i}{4i}$

b. $\frac{2 - i}{3 + 2i}$

c. $\frac{1 + i}{4i}$

d. $\frac{2 - i}{-i}$

e. $\frac{1 + 3i}{3 - i}$

Vermenigvuldigen en delen

Vermenigvuldigen van complexe getallen is een kwestie van haakjes uitwerken en gebruik maken van $i^2 = -1$. Je hebt er in de vorige paragraaf al mee geoefend. Dat gaat altijd als volgt:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i\end{aligned}$$

Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen. We zullen je een reKentruc leren om het quotiënt van twee complexe getallen snel en eenvoudig te berekenen. Eerst met een voorbeeld:

$$\frac{1 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{-4 - 7i}{4 - 6i + 6i - 9i^2} = \frac{-4 - 7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

We hebben bij de derde stap in de noemer het *reële* getal 13 gekregen, en daarmee konden we vervolgens het quotiënt uitrekenen, dat wil zeggen schrijven in de vorm $a + bi$.

De truc bestaat blijkbaar uit het vermenigvuldigen van teller en noemer met *hetzelfde* complexe getal (daardoor verandert het quotiënt niet). Dat getal is de zogenaamde *geconjugeerde* van de noemer. De *geconjugeerde* van een complex getal $\alpha = a + bi$ is het getal $a - bi$, notatie $\bar{\alpha}$. Je krijgt $\bar{\alpha}$ door het teken van het imaginaire deel van α om te klappen. In plaats van het *geconjugeerde* complexe getal zegt men ook wel het *toegevoegd* complexe getal (dat is de letterlijke vertaling).

De bovenstaande truc werkt omdat daardoor in de noemer een getal komt van de vorm

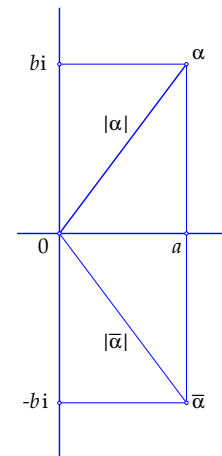
$$\alpha \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Dat is altijd een *positief reëel getal* (behalve als $a = b = 0$, maar dan is $\alpha = 0$, en ook bij complexe getallen kun je niet door 0 delen).

In de vorige paragraaf is de *absolute waarde* $|\alpha|$ van α gedefinieerd als $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Je ziet dus dat $\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2$ en ook dat $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$.

Wat je van het bovenstaande moet onthouden, is eigenlijk alleen maar dit:

*Bij vermenigvuldigen moet je haakjes uitwerken en gebruiken dat $i^2 = -1$.
Bij delen moet je teller en noemer vermenigvuldigen met de *geconjugeerde* van de noemer.*



Samenvatting

Complexe getallen zijn getallen van de vorm $\alpha = a + b i$, waarbij a en b reële getallen zijn. Je kunt ze voorstellen als punten in het vlak waarin een coördinatenstelsel gekozen is. Het complexe getal $\alpha = a + b i$ is dan het punt met coördinaten (a, b) .

Terminologie en notaties:

Als $\alpha = a + b i$ dan heet a het *reële deel* en b het *imaginaire deel* van α .

Als $\alpha = a + b i$ dan heet $\bar{\alpha} = a - b i$ de *complex geconjugeerde* van α .

Als $\alpha = a + b i$ dan heet $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de *absolute waarde* of *modulus* van α . Dit is een niet-negatief reëel getal. Het is de afstand van het punt α tot de oorsprong.

In plaats van $\alpha = a + b i$ schrijft men soms ook $\alpha = a + i b$. Het imaginaire deel staat dan niet vóór de i , maar achter de i .

Rekenregels:

Optellen en aftrekken (coördinaatsgewijs):

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen:

$$\alpha_1 \alpha_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Dit is gemakkelijk te onthouden: haakjes uitwerken en gebruiken dat $i^2 = -1$. Bijzonder geval: $\alpha \bar{\alpha} = (a + b i)(a - b i) = a^2 + b^2$. Gevolg: $\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2$.

Delen:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\alpha_1 \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 \bar{\alpha}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} i\end{aligned}$$

Ook dit is gemakkelijk te onthouden: teller en noemer vermenigvuldigen met de complex geconjugeerde van de noemer en vervolgens haakjes uitwerken.

Voor reële getallen (dat wil zeggen complexe getallen $a + b i$ met $b = 0$) komen de rekenregels overeen met de 'gewone' regels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De complexe getallen vormen zo dus een *uitbreiding* van het systeem van de reële getallen met behoud van de gewone rekenregels. Je vindt de reële getallen op de horizontale as, die daarom ook de *reële as* heet. De verticale as heet de *imaginaire as*. De getallen daarop heten de *imaginaire getallen*.

2 De meetkunde van het complexe rekenen

In de eerste paragraaf van dit hoofdstuk leer je hoe je complexe getallen kunt zien als vectoren. De som en het verschil van twee complexe getallen zijn daarmee gemakkelijk meetkundig voor te stellen. Ook kun je zo op een eenvoudige manier cirkels beschrijven. Vervolgens leer je een nieuwe notatie voor complexe getallen, de (r, φ) -notatie, die verwant is aan poolcoördinaten. Met deze notatie worden ook de rekenregels voor vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen meetkundig voorstelbaar. Daarbij speelt een beroemde formule van Leonhard Euler een belangrijke rol. We sluiten dit hoofdstuk af met de behandeling van de complexe e -machtfunctie, de complexe sinus en de complexe cosinus.

2

De meetkunde van het complexe rekenen

2.1 Hieronder is steeds een tweetal complexe getallen α en β gegeven. Bereken telkens het complexe getal dat hoort bij de vector met α als beginpunt en β als eindpunt. Maak voor jezelf ter controle ook steeds een tekening.

- $\alpha = i, \beta = -2i$
- $\alpha = 1 - i, \beta = -2$
- $\alpha = -2 + 3i, \beta = 1 - 2i$
- $\alpha = 4, \beta = -4$
- $\alpha = 8i, \beta = 8i$

2.2 Teken bij elk van de onderdelen van de vorige opgave de vector die hoort bij het complexe getal $\alpha + \beta$. Neem daarbij de oorsprong als beginpunt.

2.3 Bepaal de vergelijking van de volgende cirkels en schrijf ze in de vorm

$$z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - r^2 = 0$$

Voorbeeld: de cirkel met middelpunt $1 + i$ en straal 2 heeft als vergelijking $(z - (1 + i))(\bar{z} - (1 - i)) = 4$ en dit geeft na uitwerken

$$z\bar{z} - (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} - 2 = 0$$

- De cirkel met middelpunt i en straal 3
- De cirkel met middelpunt $1 - i$ en straal $\sqrt{2}$
- De cirkel met middelpunt 1 en straal 1
- De cirkel met middelpunt $-2 + i$ en straal 2
- De cirkel met middelpunt $1 - 2i$ en straal 1

Niet elke vergelijking die er op het eerste gezicht uitziet als een cirkelvergelijking, stelt ook echt een cirkel voor. Neem bijvoorbeeld $z\bar{z} = -1$. Dat is geen cirkelvergelijking, want het linkerlid is voor elk complex getal z groter dan of gelijk aan nul. Er zijn dus geen complexe getallen z die hieraan voldoen.

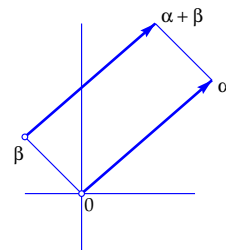
2.4 Ga na of de volgende vergelijkingen cirkels voorstellen. Zo ja, bepaal dan het middelpunt en de straal.

- $z\bar{z} - iz + i\bar{z} = 0$
- $z\bar{z} + (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 2$
- $z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4 = 0$
- $z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 5 = 0$
- $z\bar{z} + (2 - i)z + (2 + i)\bar{z} - 1 = 0$

Complexe getallen als vectoren

Een vector in het vlak kun je je voorstellen als een pijl die van een *beginpunt* naar een *eindpunt* loopt. Evenwijdige pijlen met dezelfde richting en dezelfde grootte stellen dezelfde vector voor.

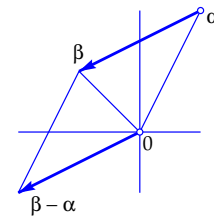
In het complexe vlak kun je bij elk complex getal α een vector maken door de pijl te tekenen die van de oorsprong naar het punt α loopt. Die vector kan dan ook worden voorgesteld door de pijl die van een willekeurig punt β naar het punt $\alpha + \beta$ loopt, want het punt $\alpha + \beta$ vormt samen met de punten 0 , α en β een parallellogram (parallellogramconstructie van $\alpha + \beta$).



De vectorvoorstelling is handig als je het *verschil* $\beta - \alpha$ van twee complexe getallen α en β in beeld wilt brengen:

$\beta - \alpha$ is de vector (pijl) die van α naar β loopt.

Let op: om het complexe getal $\beta - \alpha$ te vinden, moet je die pijl dus in de oorsprong laten beginnen. Voorbeeld: $\alpha = 1 + 2i$, $\beta = -1 + i$ dus $\beta - \alpha = -2 - i$.



De vectorvoorstelling is ook handig bij het werken met cirkels. Als C een cirkel is met middelpunt α en straal r dan geldt dus voor elk punt z op C dat

$$|z - \alpha| = r$$

Je kunt je $z - \alpha$ voorstellen als de pijl die van α naar z loopt, en die moet dus lengte r hebben.

In de figuur hierboven is $\alpha = -1 + i$ genomen en $r = 3$. Die cirkel wordt dus gegeven door $|z - (-1 + i)| = 3$, oftewel $|z + 1 - i| = 3$.

Soms is het ook handig om niet met de absolute waarde te werken, maar gebruik te maken van $|w|^2 = w\bar{w}$ (zie bladzijde 9) met $w = z - \alpha$. Dan kun je de vergelijking van de cirkel C met middelpunt α en straal r dus schrijven als

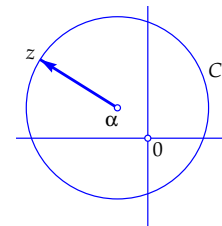
$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2$$

Bij de cirkel hierboven wordt dit dus $(z + 1 - i)(\bar{z} + 1 + i) = 9$, ofwel, na haakjes uitwerken,

$$z\bar{z} + (1 - i)\bar{z} + (1 + i)z - 8 = 0$$

De *eenheidscirkel*, de cirkel met middelpunt 0 en straal 1 , wordt gegeven door

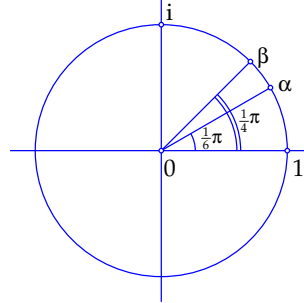
$$z\bar{z} = 1$$



2 De meetkunde van het complexe rekenen

Van sommige hoeken hebben de sinus en de cosinus bekende exacte waarden. Zo geldt bijvoorbeeld dat $\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ en $\cos \frac{1}{4}\pi = \sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (zie bladzijde 66). Dat betekent dat de punten α en β in de tekening hiernaast ook mooie exacte recht-hoekige coördinaten hebben, namelijk $\alpha = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $\beta = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Wanneer je α en β als complexe getallen schrijft, krijg je dus

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \quad \text{en} \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$$



De punten in de volgende opgaven liggen ook allemaal op de eenheids-cirkel. Teken ze en geef hun argument (in radialen) in de vorm $\varphi + 2k\pi$ (waarbij k een willekeurig geheel getal is). Voorbeeld: $\arg i = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$.

2.5

- $-i$
- -1
- 1
- $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

2.6

- $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
- $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$
- $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
- $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

Vermenigvuldigen of delen van complexe getallen op de eenheids-cirkel doe je door de argumenten bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken (zie de toelichting op de tegenoverliggende bladzijde). Gebruik dit bij de volgende opgaven. Maak ze dus op een *meetkundige* manier; werk geen haakjes uit!

2.7

- $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^2$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^3$
- $(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3$
- $(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i)^5$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i)(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^2$

2.8

- $(-i)/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^2/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)$
- $(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i)^6/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)$
- $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i)^3/(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^3$

Complexe getallen op de eenheidscircel

Elk punt op de eenheidscircel (de cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt) heeft in rechthoekige coördinaten uitgedrukt de vorm $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Hierbij is φ de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn met de oorsprong) maakt met de positieve x -as (φ is de Griekse letter 'phi'). We meten φ in radialen, tegen de klok in (180° is gelijk aan π radialen). Die hoek is dan tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald.

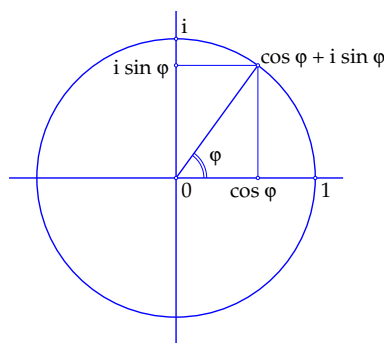
Als complex getal geschreven, is een punt op de eenheidscircel dus altijd van de vorm

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Inderdaad geldt voor zo'n getal dat

$$|\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sqrt{1} = 1$$

De hoek φ heet het *argument* van z , met als notatie $\varphi = \arg(z)$. Het argument is tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald.



Wat gebeurt er als je twee van zulke getallen, bijvoorbeeld $z_1 = \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$ en $z_2 = \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$ met elkaar vermenigvuldigt? Dan is

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \end{aligned}$$

Maar volgens bekende gonioregels (zie bladzijde 67) is

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{en} \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 &= \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

en dus is

$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dit is dus weer een getal op de eenheidscircel met als argument de som $\varphi_1 + \varphi_2$ van de argumenten van z_1 en z_2 . Met andere woorden:

Het product $z_1 z_2$ van twee complexe getallen op de eenheidscircel is weer een getal op de eenheidscircel, en wel het getal dat als argument de som van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.

Voor het quotiënt van twee van zulke complexe getallen geldt:

Het quotiënt $\frac{z_1}{z_2}$ van twee complexe getallen op de eenheidscircel is weer een getal op de eenheidscircel, en wel het getal dat als argument het verschil van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.

2 De meetkunde van het complexe rekenen

Door $\varphi = \pi$ in te vullen in Eulers formule op de tegenoverliggende bladzijde krijg je

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i 0 = -1$$

dus

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Ook dit is een beroemde formule van Euler. De vijf belangrijkste constanten uit de wiskunde, e , π , i , 1 en 0 worden erin verenigd. Bereken nu

2.9

- a. $e^{-\pi i}$
- b. $e^{2\pi i}$
- c. $e^{\frac{1}{2}\pi i}$
- d. $e^{3\pi i}$
- e. $e^{4\pi i}$

2.10

- a. $e^{-\frac{3}{2}\pi i}$
- b. $e^{\frac{2}{3}\pi i}$
- c. $e^{\frac{5}{2}\pi i}$
- d. $e^{-\frac{13}{6}\pi i}$
- e. $e^{2006\pi i}$

2.11

- a. $e^{-\pi i} e^{\frac{2}{3}\pi i}$
- b. $e^{3\pi i} e^{-2\pi i}$
- c. $e^{\frac{1}{3}\pi i} e^{-\pi i}$
- d. $\frac{e^{\frac{1}{2}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$
- e. $\frac{e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{e^{\frac{3}{4}\pi i}}$

2.12

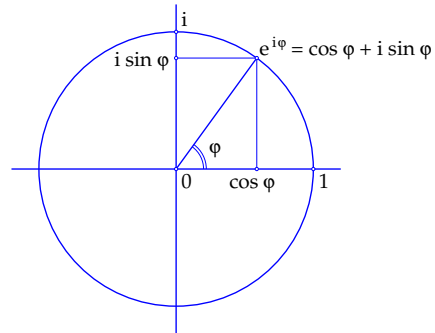
- a. $\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{e^{\frac{3}{4}\pi i}}$
- b. $\frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{e^{\frac{1}{6}\pi i}}$
- c. $e^{\frac{5}{2}\pi i} e^{3\pi i}$
- d. $\frac{e^{\frac{7}{6}\pi i}}{e^{\frac{2}{3}\pi i}}$
- e. $\frac{e^{\pi i}}{e^{4\pi i}}$

De formules van Euler

Halverwege de achttiende eeuw bewees de grote wiskundige Leonhard Euler de formule

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Wij gaan hier niet op Eulers argumenten in, maar presenteren deze formule op dit moment gewoon als een definitie, of, zo je wilt, als een *verkorte notatie*. In plaats van $\cos \varphi + i \sin \varphi$ schrijven we voortaan $e^{i\varphi}$ (of $e^{\varphi i}$). Let op: het is niet de bekende, reële e-machtfunctie die hier staat, want de exponent $i\varphi$ is geen reeel getal, maar een *imaginair* getal. En natuurlijk zit er meer achter: later zullen we e^z voor willekeurige complexe getallen z definiëren (bladzijde 21).



In de vorige paragraaf hebben we afgeleid dat

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

In de nieuwe notatie ziet dat er een stuk overzichtelijker uit:

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Net als bij gewone e-machten geldt dus ook hier: *bij het vermenigvuldigen van imaginaire e-machten worden de exponenten bij elkaar opgeteld*. En natuurlijk geldt ook:

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bij het delen van imaginaire e-machten worden de exponenten van elkaar afgetrokken.

Als je in de eerste formule van deze paragraaf $-\varphi$ in plaats van φ invult, krijg je

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Tel je de twee formules bij elkaar op, dan krijg je $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ oftewel

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Trek je ze van elkaar af, dan krijg je $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$ oftewel

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Ook deze twee beroemde formules zijn van Euler afkomstig.

2 De meetkunde van het complexe rekenen

Schrijf de volgende complexe getallen in de (r, φ) -notatie. Gebruik daarbij de arctangensfunctie (inverse tangens) op een rekenmachine. Werk in radialen en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

2.13

- $1 + 2i$
- $4 - 2i$
- $2 - 3i$
- $-2 - 3i$
- -3

2.14

- $2 + i$
- $2 - i$
- $-i$
- $-5 + i$
- $-3i$

2.15 Schrijf de volgende complexe getallen in de notatie $z = x + iy$. Gebruik daarbij een rekenmachine en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

- $2e^{2i}$
- $3e^{-i}$
- $0.2e^{0.3i}$
- $1.2e^{2.5i}$
- $e^{3.1415i}$

2.16 In deze opgave is $z = 3e^{-2i}$. Geef nu ook de volgende getallen in de (r, φ) -notatie:

- \bar{z}
- z^2
- $(\bar{z})^5$
- $\frac{1}{z}$
- z^n (n geheel)

2.17 Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 2e^{5i}$ en $z_2 = 3e^{-2i}$. Laat met behulp van de (r, φ) -notatie zien dat

- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

2.18 Toon nu algemeen met behulp van de (r, φ) -notatie aan dat voor alle complexe getallen $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ en $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ geldt dat

- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Hint: ga op dezelfde manier te werk als bij de vorige opgave, maar laat nu letters staan in plaats van getallen.

De (r, φ) -notatie voor complexe getallen

Elk complex getal $z = x + iy$ kun je schrijven in de vorm

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

waarin $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de absolute waarde van z , en $\varphi = \arg(z)$ het argument van z is, dat wil zeggen de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn van z met de oorsprong) met de positieve x -as maakt. Hierbij geldt $x = r \cos \varphi$ en $y = r \sin \varphi$.

De verkorte notatie uit de vorige paragraaf geeft

$$z = r e^{i\varphi}$$

Men noemt dit wel de (r, φ) -notatie of *polaire notatie* (omdat ze verwant is met poolcoördinaten).

De (r, φ) -notatie is bijzonder handig bij het vermenigvuldigen en delen:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bij vermenigvuldigen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

Voor het verband tussen x , y , r en φ geldt

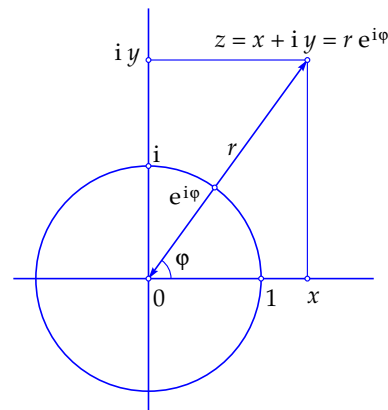
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Hiermee kun je de gewone notatie $z = x + iy$ van een complex getal z omzetten in de (r, φ) -notatie $z = r e^{i\varphi}$ en omgekeerd. Er zitten echter een paar addertjes onder het gras bij de berekening van φ als je x en y kent. In de eerste plaats is φ niet gedefinieerd als $x = y = 0$. Verder geldt: als $x = 0$, $y > 0$ dan is $\varphi = \frac{\pi}{2}$, en als $x = 0$, $y < 0$ dan is $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. In alle andere gevallen kun je φ berekenen met behulp van de arctangens-functie (de inverse van de tangens). Maar let op: de arctangens geeft altijd een uitkomst tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Voor getallen $z = x + iy$ in het linkerhalfvlak (dat wil zeggen met $x < 0$) moet je daar dan nog π bij optellen:

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi \quad \text{als } x > 0 \quad \text{en} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi + 2k\pi \quad \text{als } x < 0$$

Bedenk dat het argument tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald is.



2 De meetkunde van het complexe rekenen

Schrijf de volgende complexe getallen in de notatie $z = x + iy$. Gebruik daarbij een rekenmachine en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

2.19

- e^{2+2i}
- e^{3-i}
- $e^{0.2+0.3i}$
- $e^{1.2+2.5i}$
- $e^{-0.5+3.14i}$

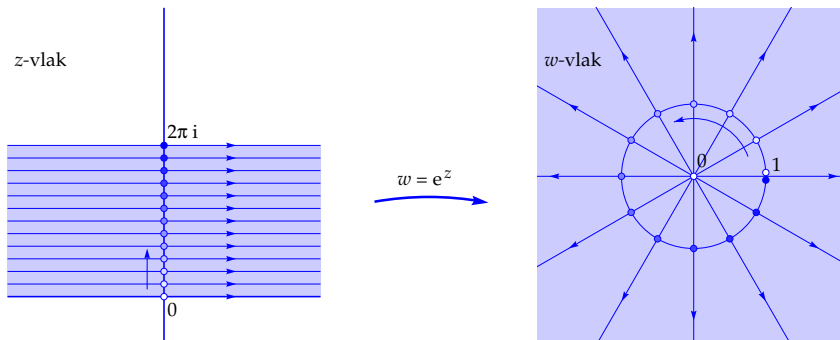
2.20

- e^{-3+i}
- $e^{3-0.5i}$
- e^{-2-3i}
- e^{-1+5i}
- $e^{0.8+3i}$

2.21

- $\cos(i)$
- $\cos(\pi + i)$
- $\sin(-2i)$
- $\sin(-2 - 3i)$
- $\sin(4\pi - 2 - 3i)$

In de volgende opgave ga je de functie $w = e^z$ in kaart brengen aan de hand van de onderstaande figuur. Van zo'n complexe functie kun je niet gemakkelijk een grafiek tekenen, want zowel de z -waarden (de originelen) als de w -waarden (de functiewaarden) bevinden zich in een vlak. Voor een 'grafiek' zou je dus iets vierdimensionaals moeten tekenen, en dat kunnen we niet. In plaats daarvan tekenen we twee complexe vlakken naast elkaar, een z -vlak en een w -vlak, en we geven daarin aan welke w -waarden bij welke z -waarden horen. We hebben al een begin gemaakt.



2.22

- Ga na dat het verticale deel $0 \leq y \leq 2\pi$ van de y -as in het z -vlak op de aangegeven wijze wordt afgebeeld op de eenheidscirkel in het w -vlak.
- De beelden van $z = 0$ en $z = 2\pi i$ zijn in het w -vlak niet helemaal correct getekend. Wat is er mis, en waarom zijn ze toch zo getekend?
- In het z -vlak is in de blauwe strook een aantal horizontale lijnen getekend. Ga precies na waarop die terecht komen in het w -vlak.
- Is er een punt z dat afgebeeld wordt op de oorsprong in het w -vlak? Zo ja, welk punt, zo nee, waarom niet?
- Bepaal de beelden van de verticale lijnstukken $x = 1, 0 \leq y \leq 2\pi$ en $x = -1, 0 \leq y \leq 2\pi$ in het z -vlak.
- Wat is het beeld van de gehele y -as?
- Bereken alle z die afgebeeld worden op $w = i$ in het w -vlak.

De complexe functies e^z , $\cos z$ en $\sin z$

Je kent de reële e-machtfunctie e^x en je weet dat

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Daarmee ken je dus de functie e^z voor alle z -waarden die *zuiver reëel* zijn en alle z -waarden die *zuiver imaginair* zijn. Voor willekeurige complexe getallen $z = x + iy$ definiëren we nu

$$e^z = e^x e^{iy}$$

Met deze definitie geldt voor alle complexe getallen z_1 en z_2 dat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ want

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} \\ &= e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{z_1} e^{z_2} \end{aligned}$$

Voor alle gehele getallen k geldt $e^{2k\pi i} = 1$, dus

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$$

Met andere woorden: *de functie e^z is periodiek met periode $2\pi i$* . Verder zie je dat $|e^z| = e^x$ en dat $\arg(e^z) = y + 2k\pi$ want $e^x e^{iy}$ is niets anders dan de polaire notatie voor e^z met $r = e^x$.

Met behulp van de formules van Euler kunnen we nu ook de cosinus en de sinus voor willekeurige complexe getallen z definiëren:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{en} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Uit het feit dat de e-macht periodiek is met periode $2\pi i$ volgt dan direct dat de cosinus en de sinus *periodiek zijn met periode 2π* , precies zoals je verwacht:

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z \quad \text{en} \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z \quad \text{voor alle gehele } k$$

Zonder bewijs of nadere toelichting vermelden we nog dat de functies e^z , $\cos z$ en $\sin z$ ook *gedifferentieerd* kunnen worden, en dat de bekende regels en formules ook in het complexe geval geldig blijven. Zo geldt

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$$

met andere woorden: *de e-machtfunctie is gelijk aan zijn eigen afgeleide*.

Hieruit kun je met behulp van de somregel en de kettingregel ook de geldigheid afleiden van de bekende formules

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z \quad \text{en} \quad \frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

2 De meetkunde van het complexe rekenen

Samenvatting

Je kunt complexe getallen zien als *vectoren*: het complexe getal α hoort bij de vector (pijl) die van de oorsprong naar het punt α in het complexe vlak loopt. Pijlen met dezelfde grootte en richting stellen dezelfde vector voor. Optellen van complexe getallen correspondeert met de *vectoroptelling* (parallelogramconstructie).

Het complexe getal $\beta - \alpha$ hoort bij de vector die loopt van α naar β .

De cirkel met middelpunt α en straal r wordt gegeven door de vergelijking

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2$$

Formules van Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

De (r, φ) -notatie (*polaire notatie*) van een complex getal $z = x + iy$ is $z = r e^{i\varphi}$. Hierbij is $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Het getal r heet de *absolute waarde* of *modulus* van z , en φ heet het *argument* van z , notatie $\varphi = \arg(z)$. Het argument wordt gemeten in radialen. Het is tot op gehele veelvoud van 2π na bepaald.

Als $x \neq 0$ dan is $\tan \varphi = y/x$ en dan kan φ als volgt uit x en y berekend worden

$$\text{als } x > 0 \quad \text{dan is } \varphi = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi$$

$$\text{als } x < 0 \quad \text{dan is } \varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi + 2k\pi$$

Bij vermenigvuldigen van complexe getallen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

De complexe e-macht:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Er geldt $|e^z| = e^x$ en $\arg(e^z) = y + 2k\pi$. De complexe e-macht is periodiek met periode $2\pi i$.

De complexe cosinus en de complexe sinus:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De complexe cosinus en de complexe sinus zijn periodiek met periode 2π .

3 Wortels en polynomen

In dit hoofdstuk maak je kennis met complexe wortels en complexe polynomen. Je leert dat elk complex getal precies n complexe n -demachtswortels heeft, en bovendien dat die wortels in het vlak de hoekpunten vormen van een regelmatige n -hoek met de oorsprong als middelpunt. Je leert vervolgens wat complexe n -degraadspolynomen en complexe n -degraadsvergelijkingen zijn. De *hoofdstelling van de algebra* zegt dat elke complexe n -degraadsvergelijking precies n oplossingen heeft, mits je ze op de juiste manier telt. Tot slot leer je dat elk reëel n -degraadspolynoom gesplitst kan worden in reële lineaire factoren en reële kwadratische factoren met een negatieve discriminant.

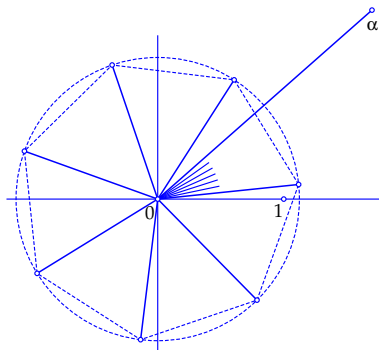
3

Wortels en polynomen

Bepaal alle hieronder gegeven n -demachtswortels in de (r, φ) -notatie (voor elke n -demachtswortel zijn er n mogelijkheden). Geef exacte antwoorden of antwoorden in vier decimalen nauwkeurig. Geef telkens ook met een tekening aan hoe die n -demachtswortels de hoekpunten vormen van een regelmatige n -hoek met de oorsprong als centrum.

Als *voorbeeld* zijn hieronder de zeven zevendemachtswortels $\sqrt[7]{\alpha}$ getekend voor $\alpha = 1.7 + 1.5i$. Hiervoor geldt $|\alpha| \approx 2.2672$ en $\arg(\alpha) \approx 0.7230 + 2k\pi$ zodat $|\sqrt[7]{\alpha}| = \sqrt[7]{|\alpha|} \approx 1.1240$ en $\arg(\sqrt[7]{\alpha}) = \frac{1}{7} \arg(\alpha) \approx 0.1033 + \frac{2k\pi}{7}$ dus

$$\sqrt[7]{\alpha} \approx 1.1240 e^{(0.1033 + \frac{2k\pi}{7})i} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, 6$$



3.1

- $\sqrt[3]{i}$
- $\sqrt[3]{-i}$
- $\sqrt[3]{1}$
- $\sqrt[3]{8}$
- $\sqrt[3]{8i}$

3.2

- $\sqrt[3]{1+i}$
- $\sqrt[3]{-27}$
- $\sqrt[3]{-27i}$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i}$
- $\sqrt[2]{4}$

3.3

- $\sqrt[4]{-1}$
- $\sqrt[4]{-i}$
- $\sqrt[5]{1}$
- $\sqrt[4]{3-4i}$
- $\sqrt[6]{6i}$

3.4

- $\sqrt[4]{1-i}$
- $\sqrt[5]{-32}$
- $\sqrt[4]{81i}$
- $\sqrt[7]{2i}$
- $\sqrt[3]{3+3i}$

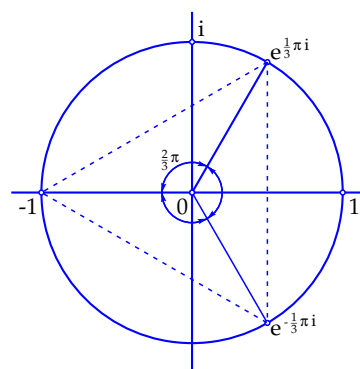
Wat zijn complexe n -demachtswortels?

We weten al dat $\sqrt{-1} = i$ want $i^2 = -1$. Of eigenlijk zouden we beter kunnen zeggen dat $\sqrt{-1} = \pm i$ want ook $(-i)^2 = -1$. Maar wat zou $\sqrt[3]{-1}$ zijn? Het moet een complex getal z zijn waarvoor geldt dat $z^3 = -1$. Kennen we zulke getallen? Jazeker, $z = -1$ voldoet, want $(-1)^3 = -1$. Maar ook $z = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ voldoet, want

$$z^3 = \left(e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)^3 = e^{3\left(\frac{1}{3}\pi i\right)} = e^{\pi i} = -1$$

En natuurlijk voldoet ook $z = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ want daarvoor geldt dat $z^3 = e^{-\pi i} = -1$.

We vinden dus *drie* complexe getallen z waarvoor geldt dat $z^3 = -1$. Alledrie kunnen ze aanspraak maken op de titel $\sqrt[3]{-1}$. Anders dan bij de reële wortels maken we in de wiskunde van de complexe getallen geen afspraken over een voorkeursbehandeling voor een van die drie wortels. Dat blijkt namelijk om allerlei redenen niet handig te zijn. Als we dus in het vervolg $\sqrt[3]{-1}$ opschrijven, moet uit de context duidelijk zijn welke van de drie wortels we bedoelen.



De voerstralen van de drie derdemachtswortels van -1 maken onderling hoeken van $\frac{2}{3}\pi$. De wortels zelf zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met de oorsprong als centrum. Waarom dat zo is, wordt duidelijk als we de bepaling van $\sqrt[3]{-1}$ nog wat beter bekijken.

We zoeken complexe getallen $z = r e^{i\varphi}$ waarvoor $z^3 = -1$. Maar $z^3 = (r e^{i\varphi})^3 = r^3 e^{3i\varphi}$ en dat moet gelijk zijn aan -1 . Omdat $|-1| = 1$ en $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$ moet $r^3 = 1$ zijn en $3\varphi = \pi + 2k\pi$. Hieruit volgt $r = 1$ (want r is een reëel getal dat niet-negatief is) en $\varphi = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi$. Voor $k = 0, k = 1$ en $k = 2$ krijgen we

$$z = e^{\frac{1}{3}\pi i}, \quad z = e^{\pi i} = -1, \quad z = e^{\frac{5}{3}\pi i} = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$$

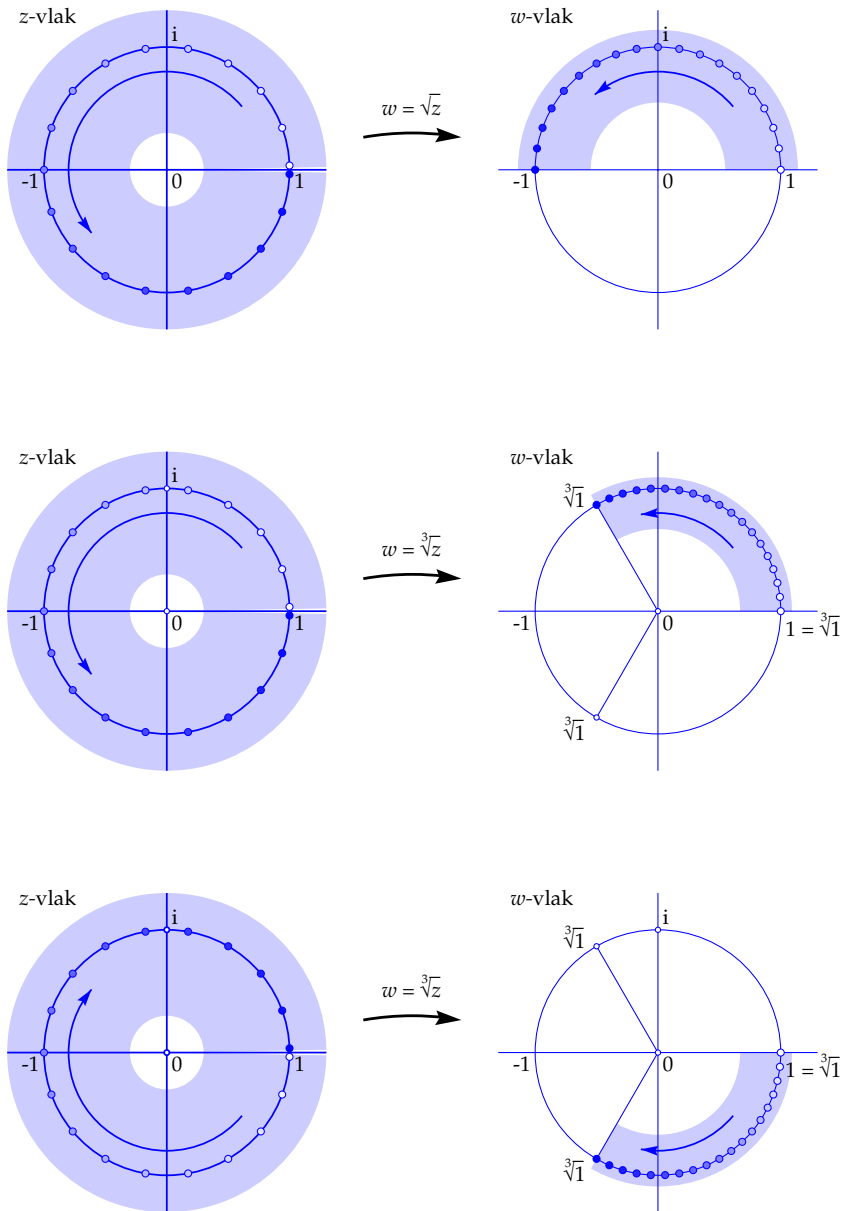
Voor alle andere gehele waarden van k krijgen we ook weer één van deze drie wortels. Je ziet dat het argument telkens met $\frac{2}{3}\pi$ toeneemt, en na drie stappen ben je weer op je uitgangspunt terug. Je kunt dit in het algemeen doen voor de derdemachtswortel uit een willekeurig complex getal $\alpha \neq 0$: in alle gevallen vind je *drie* derdemachtswortels, en hun voerstralen maken onderling hoeken van $\frac{2}{3}\pi$.

Nog algemener, nu voor een willekeurig positief geheel getal n :

Elk complex getal $\alpha = r e^{i\varphi}$ met $r = |\alpha| > 0$ heeft precies n n -demachtswortels, namelijk

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, n-1$$

3 Wortels en polynomen



Waarom wortels meerwaardig zijn

In de vorige paragraaf hebben we de n -demachtswortel uit een complex getal α gedefinieerd als

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n})i} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, n-1$$

waarbij er dus (tenzij $\alpha = 0$) precies n verschillende mogelijkheden voor zo'n wortel zijn. Bij de gewone vierkantswortel uit een positief reëel getal, bijvoorbeeld $\sqrt{4}$, zijn er in principe ook 2 mogelijkheden, namelijk 2 en -2 , maar binnen de reële getallen hebben we de vaste afspraak dat we onder $\sqrt{4}$ altijd de *positieve* wortel verstaan, dus $\sqrt{4} = 2$.

Waarom doen we bij de complexe wortels niet ook iets dergelijks? Je zou hier toch ook heel goed een afspraak kunnen maken, bijvoorbeeld: kies altijd de wortel met een minimaal niet-negatief argument. De reden dat zoiets niet gedaan wordt, is dat die complexe wortels vaak gebruikt worden als functies of onderdelen van functies, en dat je bij het gebruik van zulke functies alleen maar last zou hebben van een dergelijke afspraak. Hieronder lichten we dat toe aan de hand van enige voorbeelden.

Neem eerst functie $w = \sqrt{z}$. Een 'grafiek' van zo'n functie kun je niet zó maar maken, want zowel de z -waarden als de functiewaarden bevinden zich in een vlak, dus voor een grafiek zou je vier dimensies nodig hebben. In plaats daarvan werken we met een z -vlak en een w -vlak naast elkaar. Hiernaast zie je in de bovenste figuur zo'n illustratie. We bekijken de wortelfunctie $w = \sqrt{z}$ op een ringgebied om de eenheidscirkel in het z -vlak, waarbij we z laten beginnen in 1 en vervolgens tegen de klok in langs de eenheidscirkel laten lopen. Als we $\sqrt{1} = 1$ kiezen in het beginpunt, loopt \sqrt{w} vanaf $w = 1$ ook langs de eenheidscirkel, maar met de halve snelheid want in dit geval is

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{e^{i\varphi}} = (e^{i\varphi})^{1/2} = e^{\frac{1}{2}i\varphi}$$

Na één volledige omloop in het z -vlak is $w = \sqrt{z}$ in het w -vlak dus bij de *andere* wortel aangekomen, met andere woorden, nu geldt $\sqrt{1} = -1$. Zouden we nu een vaste afspraak voor de betekenis van \sqrt{z} hebben, dan zouden we onderweg ergens een sprong in de functiewaarden moeten maken, en dat is gekunsteld.

Hetzelfde doet zich voor bij ieder pad in het z -vlak dat één maal rond de oorsprong loopt: je komt dan altijd van de ene 'tak' van de wortel op de andere terecht. De oorsprong heet daarom een *vertakkingspunt*.

Voor hogere demachtswortels geldt iets dergelijks. Hiernaast is aangegeven hoe je bij de functie $w = \sqrt[3]{z}$ door in het z -vlak één maal om de oorsprong te lopen van $\sqrt[3]{1} = 1$ bij $\sqrt[3]{1} = e^{2\pi i/3}$ komt (tegen de klok in) of bij $\sqrt[3]{1} = e^{-2\pi i/3}$ (met de klok mee). Ook hier zou een vaste afspraak voor $\sqrt[3]{z}$ alleen maar lastig zijn.

3 Wortels en polynomen

Bepaal een tweedegraadspolynoom van de vorm $p(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ dat de getallen z_1 en z_2 als nulpunten heeft, waarbij

3.5

- a. $z_1 = 1, z_2 = -1$
- b. $z_1 = 1, z_2 = 5$
- c. $z_1 = 1, z_2 = i$
- d. $z_1 = i, z_2 = -2i$
- e. $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$

3.6

- a. $z_1 = 0, z_2 = -i$
- b. $z_1 = 1, z_2 = 2$
- c. $z_1 = 0, z_2 = -2i$
- d. $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 1 - 2i$
- e. $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i$

Bepaal een derdegraadspolynoom van de vorm $p(z) = z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ met z_1, z_2 en z_3 als nulpunten waarbij

3.7

- a. $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 0$
- b. $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 0$
- c. $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 1$
- d. $z_1 = i, z_2 = 2i, z_3 = 3i$
- e. $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = i$

3.8

- a. $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$
- b. $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, z_3 = 1$
- c. $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 2$
- d. $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = 1$
- e. $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 2i$

Over n -demachtswortels en n -degraadspolynomen

We hebben gezien dat er drie derdemachtswortels uit -1 zijn, namelijk -1 , $e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $e^{-\frac{1}{3}\pi i}$. Voor het gemak schrijven we nu $\rho = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $\bar{\rho} = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ (ρ is de Griekse letter 'rho'). De drie wortels zijn dan dus -1 , ρ en $\bar{\rho}$.

De derdemachtswortels uit -1 zijn de complexe getallen z waarvoor geldt dat $z^3 = -1$, met andere woorden, het zijn de oplossingen van de *derdegraadsvergelijking*

$$z^3 + 1 = 0$$

Nog weer anders gezegd, het zijn de *nulpunten* van het *derdegraadspolynoom* $z^3 + 1$. Maar bekijk nu eens de vergelijking

$$(z - (-1))(z - \rho)(z - \bar{\rho}) = 0$$

Het is duidelijk dat de oplossingen hiervan ook gelijk zijn aan -1 , ρ en $\bar{\rho}$. Zou het linkerlid misschien gelijk zijn aan $z^3 + 1$?

Werk de haakjes uit:

$$(z - (-1))(z - \rho)(z - \bar{\rho}) = (z + 1)(z^2 - (\rho + \bar{\rho})z + \rho\bar{\rho})$$

Maar $\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ dus $\rho + \bar{\rho} = 1$ en $\rho\bar{\rho} = 1$ (ga na!), zodat inderdaad

$$(z + 1)(z^2 - (\rho + \bar{\rho})z + \rho\bar{\rho}) = (z + 1)(z^2 - z + 1) = z^3 - z^2 + z + z^2 - z + 1 = z^3 + 1$$

Wat we in dit bijzondere geval gezien hebben, blijkt in het algemeen te gelden:

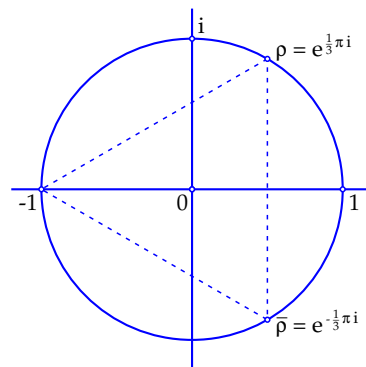
Als een n -degraadspolynoom

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$$

n verschillende nulpunten z_1, z_2, \dots, z_n heeft, dan kan $p(z)$ geschreven worden als

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

In het bovenstaande voorbeeld was $p(z) = z^3 + 1$ en $z_1 = -1$, $z_2 = \rho$, $z_3 = \bar{\rho}$. In de vorige paragraaf hebben we telkens de n -demachtswortels van een getal α bepaald. Het bijbehorende polynoom was dan telkens van de vorm $p(z) = z^n - \alpha$. We hebben gezien dat er dan inderdaad steeds n nulpunten (de n -demachtswortels) zijn, behalve in het flauwe geval dat $\alpha = 0$. Hoe het in het algemeen zit bij een n -degraadspolynoom, behandelen we in de volgende paragraaf.



3 Wortels en polynomen

3.9 Hieronder zijn telkens een polynoom $p(z)$ en een getal α gegeven. Ga na dat steeds geldt dat $p(\alpha) = 0$ en bepaal vervolgens het polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - \alpha)q(z)$.

- $p(z) = z^4 - z^3 - 2z^2, \quad \alpha = -1$
- $p(z) = z^4 - z^3 + 3z^2 - 3z, \quad \alpha = 1$
- $p(z) = z^5 - iz^4 - z + i, \quad \alpha = i$
- $p(z) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4, \quad \alpha = 2$
- $p(z) = z^4 - 1, \quad \alpha = -i$
- $p(z) = z^4 + 2z^2 + 1, \quad \alpha = i$

Hint: Je kunt de bovenstaande opgaven gewoon oplossen door systematisch proberen, maar degenen die weten wat een *staartdeling* is, zullen merken dat het daarmee wel zo gemakkelijk gaat. Als voorbeeld geef ik hierbij de staartdeling die hoort bij het geval $p(z) = 3z^4 - 7z^3 + 3z^2 - z - 2$ en $\alpha = 2$. Invullen laat zien dat $\alpha = 2$ een nulpunt is, dat wil zeggen dat $p(2) = 0$. De volgende staartdeling geeft je het quotiëntpolynoom $q(z) = 3z^3 - z^2 + z + 1$.

$$\begin{array}{r} z - 2 \bigg/ 3z^4 - 7z^3 + 3z^2 - z - 2 \quad \bigg\backslash 3z^3 - z^2 + z + 1 \\ \underline{3z^4 - 6z^3} \\ z^3 + 3z^2 - z - 2 \\ \underline{- z^3 + 2z^2} \\ z^2 - z - 2 \\ \underline{z^2 - 2z} \\ z - 2 \\ \underline{z - 2} \\ 0 \end{array}$$

3.10 Onderzoek bij elk van de onderdelen van de vorige opgave de multiplicititeit van het nulpunt α en bepaal vervolgens ook de andere nulpunten van het polynoom $p(z)$.

De hoofdstelling van de algebra

Voordat we verder gaan, geven we eerst een formele definitie van de term polynoom en een aantal daarmee verband houdende veel gebruikte termen.

Definitie: Een *polynoom* (Engels: *polynomial*) is een functie van de vorm $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$. De complexe getallen $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ heten de *coëfficiënten*, en het complexe getal z heet de *variabele*. We veronderstellen altijd dat $\alpha_n \neq 0$ (want anders kun je de term $\alpha_n z^n$ beter weglaten). De andere coëfficiënten kunnen wél nul zijn. Het getal n heet de *graad* van het polynoom. In plaats van polynoom wordt ook wel *veelterm* gebruikt.

Bij elk complex getal z geeft zo'n polynoom een complex getal $p(z)$ als *functiewaarde*. Als voor een zekere z_0 geldt dat $p(z_0) = 0$ dan heet z_0 een *nulpunt* van het polynoom. Het getal z_0 is dan een *oplossing* van de vergelijking

$$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

Zo'n vergelijking heet een *n-degraadsvergelijking*. In plaats van een oplossing van de vergelijking zegt men ook wel een *wortel* van de vergelijking, zelfs al komen er in de schrijfwijze van zo'n oplossing geen wortels voor.

Voor elk *n*-degraadspolynoom $p(z)$ met $n > 1$ geldt de volgende stelling.

Factorstelling: Als $p(z)$ een nulpunt z_0 heeft, dan bestaat er een polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - z_0)q(z)$. Je kunt dan dus een factor $(z - z_0)$ van $p(z)$ afsplitsen.

Een eerstegraadspolynoom heet ook wel een *lineair* polynoom; de bijbehorende vergelijking noemt men dan ook vaak een *lineaire* vergelijking. Een tweedegraadsvergelijking heet ook wel een *kwadratische* vergelijking of *vierkantsvergelijking*. Vierkantsvergelijkingen kun je oplossen met de *abc*-formule. Complexe vierkantsvergelijkingen hebben altijd twee complexe oplossingen z_1 en z_2 . Het bijbehorende polynoom $p(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ kan dan geschreven worden als $p(z) = \alpha_2 (z - z_1)(z - z_2)$. Als de discriminant nul is, vallen z_1 en z_2 samen en dan geldt dus $p(z) = \alpha_2 (z - z_1)^2$.

In het algemeen geldt voor complexe *n*-degraadspolynomen de volgende stelling, die bekend staat als de *hoofdstelling van de algebra* en die voor het eerst bewezen is door C.F. Gauss in het begin van de negentiende eeuw.

Hoofdstelling van de algebra: Bij elk *n*-degraads polynoom $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ met $n \geq 1$ zijn er *n* complexe getallen z_1, \dots, z_n zo, dat $p(z) = \alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_n)$.

De getallen z_1, \dots, z_n zijn de nulpunten van $p(z)$. Ze hoeven niet verschillend te zijn. Komt een nulpunt *k* maal voor, dan spreekt men van een *k*-voudig nulpunt; *k* heet de *multipliciteit* van het nulpunt. Elk *n*-degraadspolynoom met $n \geq 1$ heeft dus precies *n* complexe nulpunten als je ze elk met hun juiste multipliciteit telt.

3 Wortels en polynomen

3.11 Splits de volgende reële polynomen in reële lineaire factoren en reële kwadratische factoren met een negatieve discriminant.

(Hint: als je zo'n ontbinding niet direct ziet, zoek dan eerst een nulpunt en gebruik de factorstelling.)

- $z^3 + 1$
- $z^3 - 1$
- $z^4 - 1$
- $z^3 + 27$
- $z^4 + 2z^2 + 1$
- $z^4 - 2z^2 + 1$

3.12 Stel dat n een oneven getal is en dat

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

een reëel n -degraadspolynoom is. Ook zonder gebruik te maken van complexe getallen kun je bewijzen dat $p(x)$ minstens één reëel nulpunt heeft, namelijk door $p(x)$ te schrijven als

$$p(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

en het gedrag van $p(x)$ voor grote positieve en grote negatieve x -waarden met elkaar te vergelijken. Geef zo'n bewijs.

Over het oplossen van n -degraadsvergelijkingen

Bij vierkantsvergelijkingen kan men de oplossingen vinden met de *abc*-formule. Ook voor derdegraads- en vierdegraadsvergelijkingen zijn er zulke exacte formules. Die zijn echter een stuk ingewikkelder; we behandelen ze hier niet.

Voor n -degraadsvergelijkingen met $n \geq 5$ bestaan er geen vergelijkbare algebraïsche methodes om op een dergelijke manier alle oplossingen te vinden. In zulke gevallen zal men zijn toevlucht vaak nemen tot numerieke methodes waarmee de nulpunten kunnen worden benaderd. De *hoofdstelling van de algebra* garandeert dus dat er altijd n oplossingen zijn (mits geteld met de juiste multipliciteit), maar de stelling geeft geen algemene methode om ze te vinden!

Reële polynomen

Wanneer alle coëfficiënten van een polynoom reële getallen zijn, noemen we het een *reëel polynoom*. Het is dan van de vorm

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

voor zekere reële getallen a_n, \dots, a_0 . We veronderstellen weer dat $a_n \neq 0$. Ook zo'n reëel polynoom heeft n complexe nulpunten, maar die hoeven niet reëel te zijn. Zo heeft $p(z) = z^2 + 1$ geen reële nulpunten. We kunnen wel direct zeggen dat er *hoogstens* n reële nulpunten zijn. Omdat reële polynomen natuurlijk veel voorkomen, is het goed om er een aantal speciale eigenschappen van af te leiden. De belangrijkste is de volgende stelling.

Stelling: *Als $z_0 = x_0 + i y_0$ een niet-reëel nulpunt is van het reële polynoom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ dan is de geconjugeerde $\bar{z}_0 = x_0 - i y_0$ ook een nulpunt van $p(z)$.*

Het bewijs, dat heel eenvoudig is, berust op drie eigenschappen die onmiddellijk uit de definitie van geconjugeerde volgen:

1. Als a een reëel getal is, dan is $\bar{a} = a$.
2. Voor elk tweetal complexe getallen α en β geldt $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$.
3. Voor elk tweetal complexe getallen α en β geldt $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \bar{\beta}$.

Uit de derde eigenschap volgt in het bijzonder dat $\overline{z^k} = (\bar{z})^k$ voor elke k .

Bewijs: Stel $z_0 = x_0 + i y_0$ is een nulpunt van $p(z)$, dus $p(z_0) = 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned} p(\bar{z}_0) &= a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\ &= \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Als er in de ontbinding $p(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$ een factor $(z - z_k)$ is waarvoor $z_k = x_k + i y_k$ niet reëel is, dan is er dus ook een factor $(z - \bar{z}_k)$. We nemen ze samen en werken de haakjes uit:

$$(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k \bar{z}_k = z^2 - 2x_k z + x_k^2 + y_k^2$$

Dit is een reëel kwadratisch polynoom met discriminant $4x_k^2 - 4(x_k^2 + y_k^2) = -4y_k^2$. Die is negatief, zoals verwacht. Afsplitsen van die kwadratische factor geeft een polynoom van graad $n - 2$ waarop we weer hetzelfde kunnen toepassen, enzovoort. We hebben hiermee bewezen:

Stelling: *Elk reëel polynoom kan geschreven worden als een product van reële lineaire polynomen en reële kwadratische polynomen met een negatieve discriminant.*

Een direct gevolg is dat de graad van een reëel polynoom zonder reële nulpunten altijd even is. Bijgevolg heeft elk reëel polynoom van oneven graad minstens één reëel nulpunt.

Samenvatting

De n -demachtswortels van een complex getal $\alpha = r e^{i\varphi}$ zijn gedefinieerd als

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n})i} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, n-1$$

waarbij er dus (tenzij $\alpha = 0$) precies n verschillende mogelijkheden voor zo'n wortel zijn. Ze vormen de hoekpunten van een regelmatige n -hoek met de oorsprong als middelpunt.

Een *polynoom* is een functie van de vorm

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (\text{met } \alpha_n \neq 0)$$

De complexe getallen $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ heten de *coëfficiënten*, en het complexe getal z heet de *variabele*. Het getal n heet de *graad* van het polynoom.

Factorstelling: Als een polynoom $p(z)$ van graad groter dan 1 een nulpunt z_0 heeft, dan bestaat er een polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - z_0)q(z)$. Je kunt dan dus een factor $(z - z_0)$ van $p(z)$ afsplitsen.

Hoofdstelling van de algebra: Bij elk n -degraads polynoom

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

van graad groter dan of gelijk aan 1 zijn er n complexe getallen z_1, \dots, z_n zo, dat

$$p(z) = \alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_n)$$

De getallen z_1, \dots, z_n zijn de *nulpunten* van $p(z)$, met andere woorden, het zijn de oplossingen van de n -degraadsvergelijking $p(z) = 0$.

De nulpunten hoeven niet verschillend te zijn. Komt een nulpunt in de bovenstaande ontbinding k maal voor, dan spreekt men van een *k-voudig* nulpunt; k heet de *multipliciteit* van het nulpunt. Elk n -degraadspolynoom met $n \geq 1$ heeft dus precies n complexe nulpunten als je ze elk met hun juiste multipliciteit telt.

Stelling: Elk reëel polynoom kan geschreven worden als een product van reële lineaire polynomen en reële kwadratische polynomen met een negatieve discriminant.

Gevolgen:

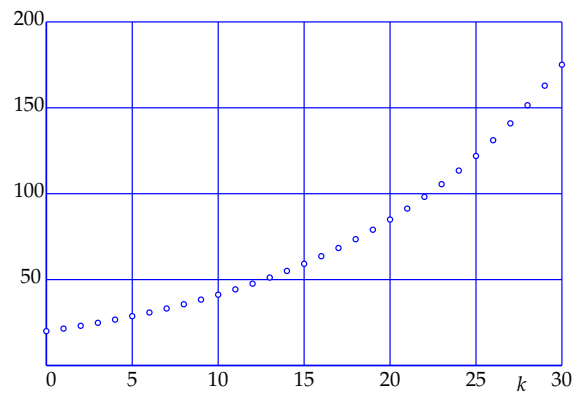
1. De graad van een reëel polynoom zonder reële nulpunten is altijd even.
2. Elk reëel polynoom van oneven graad heeft minstens één reëel nulpunt.

4 Lineaire recursies

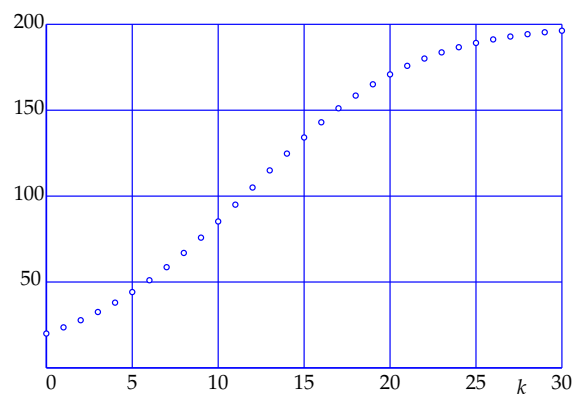
Dit hoofdstuk gaat over reële getallenrijen die door een lineaire recurrente betrekking gedefinieerd worden. Een voorbeeld dat daarbij een prominente rol zal spelen, is de bekende rij van Fibonacci. Met behulp van complexe getallen zullen we een volledig overzicht geven van de methodes om uit zo'n betrekking een formule af te leiden voor de k -de term van zo'n rij. Alle theorie uit de vorige hoofdstukken wordt daarbij toegepast.

4

Lineaire recursies



Een voorbeeld van een discreet exponentieel groeimodel, gegeven door de recurrente betrekking $x_{k+1} = g x_k$. Hier is $x_0 = 20$ en $g = 1.075$ genomen.



Een voorbeeld van een discreet logistisch groeimodel, gegeven door de recurrente betrekking $x_{k+1} = x_k + c x_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right)$. Hier is $x_0 = 20$, $c = 0.2$ en $M = 200$ genomen.

Recursief gedefinieerde rijen

Veel verschijnselen in de werkelijkheid kunnen gemodelleerd worden door een rij reële getallen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$$

die aan bepaalde wetmatigheden voldoet. Stel bijvoorbeeld dat je de groei van een bacteriënpopulatie wilt modelleren. In zo'n model zou je onder x_k de populatieomvang kunnen verstaan k uur na een zeker aanvangstijdstip. Een heel eenvoudig model wordt beschreven door

$$x_{k+1} = g x_k \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

Hierbij neem je dus aan dat de populatie elk uur met een vaste groeifactor g toeneemt. Omdat $x_1 = g x_0$, $x_2 = g x_1 = g^2 x_0$, $x_3 = g x_2 = g^3 x_0$, enzovoort, geldt voor alle k dat

$$x_k = g^k x_0$$

Dit heet een *discreet exponentieel groeimodel*. De wetmatigheid $x_{k+1} = g x_k$ heet een *recursieve definitie* omdat elk element van de rij (behalve de startwaarde x_0) in zijn voorganger wordt uitgedrukt. In het algemeen heet een wetmatigheid van de vorm

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

waarbij $f(x)$ een gegeven functie is, een *recurrente betrekking van de eerste orde*. Een voorbeeld hiervan is

$$x_{k+1} = x_k + c x_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right) \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

die het zogenaamde *discrete logistische groeimodel* beschrijft. Dit is een model voor begrensde groeiprocessen.

Het kan ook zijn dat elke x_{k+1} van zijn twee voorganger x_k en x_{k-1} afhangt. Dan spreekt men van een recurrente betrekking *van de tweede orde*. Een bekend voorbeeld is de *rij van Fibonacci*, die gegeven wordt door

$$x_{k+1} = x_k + x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

en de twee *startwaarden* $x_0 = x_1 = 1$. Het is niet moeilijk om die rij voort te zetten:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Elke term is immers de som van zijn twee voorgangers. Maar lastiger is het om een formule te geven die x_k geeft als functie van k .

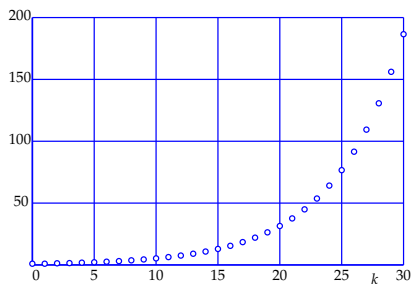
We hoeven ons niet te beperken tot recurrente betrekkingen van orde 1 of 2. Hangt x_{k+1} af van zijn n voorgangers $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n+1}$ dan spreekt men van een *recurrente betrekking van de n -de orde*. Er zijn dan nog n startwaarden nodig om de rij te helemaal vast te leggen.

4 Lineaire recursies

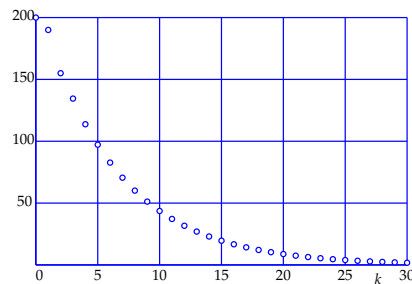
Hieronder zie je enige voorbeelden van oplossingsrijen van lineaire recurrente betrekkingen van de tweede orde, dat wil zeggen betrekkingen van de vorm

$$x_{k+1} = p x_k + q x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

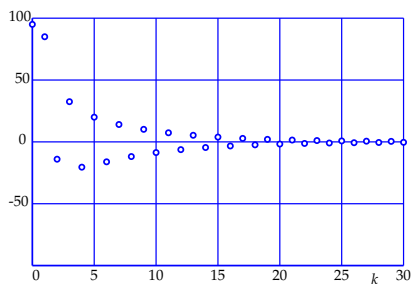
De grafieken geven een indruk van de grote verscheidenheid aan verschijningsvormen van zulke rijen. Telkens zijn de waarden van p en q en de startwaarden x_0 en x_1 gegeven.



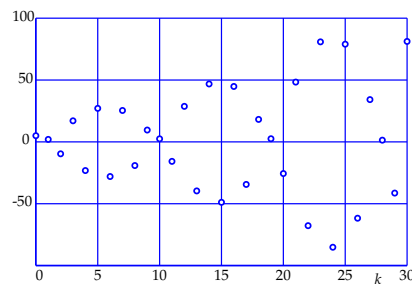
$$p = 0.5, q = 0.83, x_0 = 1, x_1 = 1$$



$$p = 0.5, q = 0.3, x_0 = 200, x_1 = 190$$



$$p = -0.5, q = 0.3, x_0 = 95, x_1 = 85$$



$$p = -2, q = -1.13, x_0 = 5, x_1 = 2$$

4.1 Bereken in elk van de hierboven gegeven gevallen de discriminant en de wortels van de karakteristieke vergelijking. Rond je antwoorden af op vier decimalen.

Lineaire recursies van orde 2

Een recurrente betrekking van de vorm

$$x_{k+1} = p x_k + q x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

waarbij p en q willekeurige gegeven constanten zijn, heet een *lineaire recurrente betrekking van de tweede orde*. (Iets vollediger luidt de vakterm: *homogene lineaire recurrente betrekking van de tweede orde met constante coëfficiënten* maar wij zullen die uitgebreide terminologie hier niet verder gebruiken of toelichten.) We zullen in dit hoofdstuk een algemene oplossingsmethode presenteren, dat wil zeggen een methode waarmee je een formule kunt vinden die x_k uitdrukt in k en de startwaarden x_0 en x_1 . In bepaalde gevallen, afhankelijk van de constanten p en q , zullen we daarbij complexe getallen gebruiken.

Het idee is als volgt. We laten de startwaarden voorlopig even terzijde, en concentreren ons op de recurrente betrekking zelf. Geïnspireerd door het discrete exponentiële groeimodel proberen we of er oplossingen zijn van de vorm $x_k = \alpha^k$. Invullen in de recurrente betrekking geeft dan

$$\alpha^{k+1} = p \alpha^k + q \alpha^{k-1}$$

Delen door α^{k-1} en alles naar het linkerlid brengen geeft vervolgens

$$\alpha^2 - p \alpha - q = 0$$

Dit heet de *karacteristieke vergelijking* van de recurrente betrekking. Het is een kwadratische vergelijking waaraan α blijkaar moet voldoen. Je ziet dat k er niet meer in voorkomt! De *abc*-formule geeft de oplossingen:

$$\alpha_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

De aard van de oplossingen hangt af van de discriminant $D = p^2 + 4q$. Als $D > 0$ is, zijn de twee oplossingen reëel, als $D = 0$ zijn ze reëel en vallen ze samen, en als $D < 0$ zijn ze toegevoegd complex. Elke oplossing α van de karakteristieke vergelijking geeft een oplossingsrij $\{\alpha^k\}$ van de lineaire recurrente betrekking.

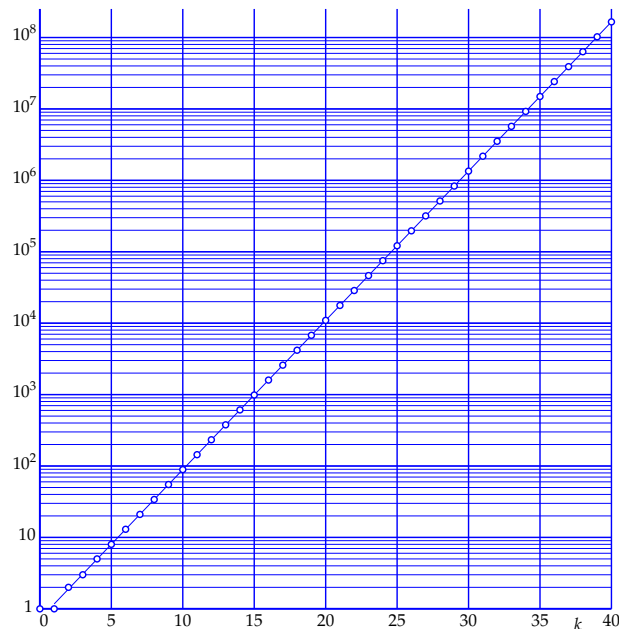
We behandelen de drie gevallen $D > 0$, $D < 0$ en $D = 0$ aan de hand van voorbeelden. Maar eerst merken we op dat voor lineaire recurrente betrekkingen het *superpositiebeginsel* geldt: als $\{x_k\}$ en $\{y_k\}$ allebei oplossingsrijen zijn, dan is voor elke keuze van A_1 en A_2 ook de *lineaire combinatie* $\{z_k\} = \{A_1 x_k + A_2 y_k\}$ van de twee rijen een oplossing. Invullen geeft namelijk

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= A_1 x_{k+1} + A_2 y_{k+1} = A_1 (p x_k + q x_{k-1}) + A_2 (p y_k + q y_{k-1}) \\ &= p (A_1 x_k + A_2 y_k) + q (A_1 x_{k-1} + A_2 y_{k-1}) \\ &= p z_k + q z_{k-1} \end{aligned}$$

dus ook de rij $\{z_k\}$ is een oplossingsrij.

4 Lineaire recursies

4.2 Omdat de rij van Fibonacci zo snel stijgt, is het lastig er een grafiek van te maken. Hieronder is dat gedaan met een logaritmische schaalverdeling op de verticale as. Daarbij worden dus niet de punten (k, x_k) getekend maar de punten (k, y_k) waarbij $y_k = \log x_k$.



- Verklaar de getallen die bij de verticale as genoteerd staan.
- Neem de afstand tussen de horizontale lijnen die gemarkeerd zijn als '1' en '10' als lineaire eenheid op de verticale as. Op welke hoogtes zijn de tussenliggende horizontale lijnen dan getekend?
- Op de bladzijde hiertegenover is aangetoond dat $x_k = A_1\alpha_1^k + A_2\alpha_2^k$, waarbij A_1, A_2, α_1 en α_2 de daar berekende waarden hebben. Ook is aangetoond dat $A_2\alpha_2^k \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$, met andere woorden, dat x_k op den duur vrijwel gelijk wordt aan $A_1\alpha_1^k$. Verklaar hiermee waarom de getekende punten vrijwel op een rechte lijn liggen. Die lijn is ook in de figuur getekend.
- Die rechte lijn heeft een vergelijking van de vorm $y = a + bk$ voor zekere constanten a en b . Geef de exacte waarden van a en b en ga na of die waarden in overeenstemming zijn met de tekening.

De rij van Fibonacci

Bij de rij van Fibonacci is $p = q = 1$ en dan is $D = p^2 + 4q = 5$ positief. De twee reële oplossingen zijn $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ze geven twee oplossingsrijen van de recurrente betrekking $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$, namelijk

$$1, \alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots$$

en

$$1, \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \dots$$

Geen van beide voldoen ze aan de startwaarden $x_0 = x_1 = 1$, maar daar valt wel wat aan te doen door een geschikte *lineaire combinatie* te nemen, dat wil zeggen een rij van de vorm $x_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k$. Voor elke paar A_1 en A_2 voldoet die rij ook aan de recurrente betrekking, en naar blijken zal kun je A_1 en A_2 zo kiezen, dat $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$ geldt. Er moet dan namelijk gelden dat

$$\begin{aligned} (x_0 = 1) & \quad A_1 + A_2 = 1 \\ (x_1 = 1) & \quad A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{aligned}$$

Dit is een stelsel van twee vergelijkingen waaruit je A_1 en A_2 kunt oplossen. Het resultaat (zelf doen!) is $A_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $A_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ zodat

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1})$$

Daarmee is de gezochte formule voor x_k gevonden!

Het is verbazingwekkend dat deze uitdrukking voor elke k een *geheel* getal voorstelt. Wie het niet gelooft, controleert het maar! Controleer in elk geval zelf dat $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$.

Omdat $\alpha_1 \approx 1.6180339887$ geldt $\alpha_1 > 1$ waardoor $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^{k+1} = \infty$. Voor α_2 geldt $\alpha_2 \approx -0.6180339887$ dus $|\alpha_2| < 1$ zodat $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_2^{k+1} = 0$. De rij $\{\alpha_2^k\}$ gaat zeer snel naar nul, en dat betekent dat x_k voor grote k vrijwel gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_1^{k+1}$. Omdat x_k altijd een geheel getal is, kun je x_k vinden door deze benadering af te ronden. Zo geldt bijvoorbeeld $\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_1^{41} \approx 165580140.99$ en dus is $x_{40} = 165580141$.

De bovenstaande oplossingsmethode is toepasbaar bij lineaire recurrente betrekkingen van de tweede orde wanneer de discriminant van de karakteristieke vergelijking positief is. De reële oplossingen daarvan leveren twee speciale 'basisoplossingsrijen' $\{\alpha_1^k\}$ en $\{\alpha_2^k\}$. Bij gegeven startwaarden x_0 en x_1 kun je dan altijd een lineaire combinatie $\{A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k\}$ vinden die aan deze startwaarden voldoet. Je moet daarvoor het stelsel $A_1 + A_2 = x_0$, $A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = x_1$ oplossen.

4 Lineaire recursies

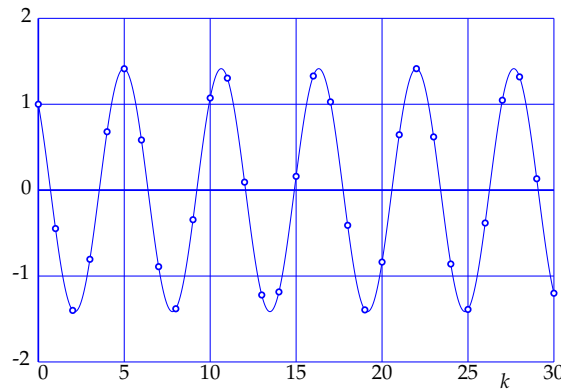
4.3 Stel dat $\{x_k\}$ de oplossingsrij is van het probleem op de tegenoverliggende bladzijde, dat wil zeggen dat

$$x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

met startwaarden $x_0 = 1, x_1 = -1$. Noem $y_k = \frac{x_k}{(\sqrt{5})^k}$. Dan geldt dus

$$y_k = \cos(k\varphi) - \sin(k\varphi)$$

Hieronder is die rij $\{y_k\}$ getekend voor $k = 0, \dots, 30$.



- Geef de recurrente betrekking waaraan de rij $\{y_k\}$ voldoet en geef ook de startwaarden y_0 en y_1 .
- In de bovenstaande tekening is ook de grafiek van een functie $f(t)$ getekend waarvoor $f(k) = y_k$. Geef het (voor de hand liggende) functievoorschrift van $f(t)$.
- De grafiek van $f(t)$ is zo te zien een sinusoïde. Toon aan dat dit inderdaad het geval is door $f(t)$ te schrijven in de standaardvorm

$$f(t) = A \cos(2\pi\nu t + \chi)$$

Bereken daarbij de amplitude A , de frequentie ν en de fasehoek χ (χ is de Griekse letter 'chi'). Geef zowel exacte antwoorden als antwoorden in 4 decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoorden aan de hand van de bovenstaande grafiek. Bedenk daarbij dat de periode T gelijk is aan $T = \frac{1}{\nu}$.

- 4.4 Ook deze opgave gaat over het voorbeeld op de tegenoverliggende pagina.
- Bereken de constanten A_1 en A_2 die horen bij de daar gegeven startwaarden $x_0 = 1$ en $x_1 = -1$. (Je zult complexe getallen als antwoorden krijgen.)
 - Geef in het algemeen formules voor A_1 en A_2 uitgedrukt in C_1 en C_2 .

Een oscillerende rij

Voor de lineaire recurrente betrekking

$$x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

is de karakteristieke vergelijking

$$\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0$$

De discriminant $D = 4 - 20 = -16$ is negatief. De oplossingen zijn $\alpha_1 = 1 + 2i$ en $\alpha_2 = 1 - 2i$. Het is handig om ze in de (r, φ) -notatie te schrijven:

$$\alpha_1 = \sqrt{5} e^{i\varphi} \quad \text{en} \quad \alpha_2 = \sqrt{5} e^{-i\varphi}$$

waarbij $\varphi = \arctan 2 \approx 1.1071$. De twee 'basisoplossingen' zijn

$$\alpha_1^k = (\sqrt{5})^k e^{ik\varphi} \quad \text{en} \quad \alpha_2^k = (\sqrt{5})^k e^{-ik\varphi}$$

en de 'algemene oplossing' heeft nu de gedaante

$$x_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k = (\sqrt{5})^k (A_1 e^{ik\varphi} + A_2 e^{-ik\varphi})$$

waarin A_1 en A_2 (complexe) constanten zijn die zo gekozen moeten worden dat aan zekere gegeven startwaarden x_0 en x_1 voldaan is. Het is echter handig om de algemene oplossing eerst met behulp van de relaties van Euler (zie bladzijde 17) als volgt te herschrijven

$$x_k = (\sqrt{5})^k ((A_1 + A_2) \cos(k\varphi) + i(A_1 - A_2) \sin(k\varphi))$$

oftewel

$$x_k = (\sqrt{5})^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi))$$

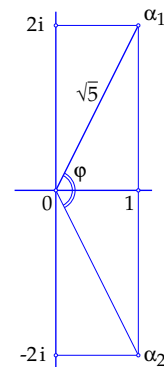
waarbij $C_1 = A_1 + A_2$ en $C_2 = i(A_1 - A_2)$. Door C_1 en C_2 reëel te kiezen, krijg je reële oplossingsrijen.

Als bijvoorbeeld gegeven is dat $x_0 = 1$ en $x_1 = -1$ dan moet je het volgende stelsel vergelijkingen oplossen:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_1 \sqrt{5} \cos \varphi + C_2 \sqrt{5} \sin \varphi &= -1 \end{aligned}$$

Als je nu echter bedenkt dat $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ en $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (zie de figuur hierboven), dan vind je gemakkelijk dat $C_1 = 1$ en $C_2 = -1$ en daarmee de gezochte formule voor de oplossingsrij

$$x_k = (\sqrt{5})^k (\cos(k\varphi) - \sin(k\varphi))$$



4 Lineaire recursies

4.5 Schrijf de oplossingsrij $\{x_k\}$ van elk van de volgende lineaire recurrente betrekkingen in de beide vormen

$$x_k = r^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi)) = 2c r^k \cos(k\varphi + \chi)$$

Geef de waarden van r , C_1 , C_2 , φ , c en χ daarbij exact of op vier decimalen afgerond. Bedenk daarbij dat $C_1 - iC_2 = 2A_1 = 2c e^{i\chi}$.

- $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
- $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$
- $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
- $x_{k+1} = x_k - x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$
- $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

Een oscillerende rij (vervolg)

In de vorige paragraaf vonden we de algemene oplossing van de lineaire recurren-
te betrekking

$$x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

in de vorm

$$x_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k = (\sqrt{5})^k (A_1 e^{ik\varphi} + A_2 e^{-ik\varphi})$$

waarbij $\alpha_1 = 1 + 2i = \sqrt{5} e^{i\varphi}$ en $\alpha_2 = 1 - 2i = \sqrt{5} e^{-i\varphi}$. De constanten A_1 en A_2 zijn complexe getallen. Zoek je naar reële oplossingsrijen, dan kun je beter de volgende vorm gebruiken

$$x_k = (\sqrt{5})^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi))$$

Voor reële waarden van C_1 en C_2 krijg je dan een reële oplossingsrij. De bijdrage $C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi)$ in het rechterlid kun je met behulp van gonioformules schrijven in de vorm $A \cos(k\varphi + \chi)$ zoals je in de opgave op bladzijde 42 in een concreet geval hebt kunnen controleren. Met complexe getallen gaat dat, zonder gonioformules, nog eenvoudiger, zoals we nu zullen laten zien.

Uit $C_1 = A_1 + A_2$ en $C_2 = i(A_1 - A_2)$ (zie bladzijde 43) volgt $C_1 - iC_2 = 2A_1$ en $C_1 + iC_2 = 2A_2$. Daarom zijn A_1 en A_2 *geconjugeerde complexe getallen* wanneer C_1 en C_2 reële getallen zijn. In dat geval geldt dat $A_1 = c e^{i\chi}$ en $A_2 = c e^{-i\chi}$ met $c = |A_1| = |A_2|$ en $\chi = \arg(A_1) = -\arg(A_2)$. De oplossingsrij $\{x_k\}$ kan dan dus geschreven worden als

$$\begin{aligned} x_k &= (\sqrt{5})^k (A_1 e^{ik\varphi} + A_2 e^{-ik\varphi}) = c(\sqrt{5})^k (e^{i\chi} e^{ik\varphi} + e^{-i\chi} e^{-ik\varphi}) \\ &= c(\sqrt{5})^k (e^{i(k\varphi+\chi)} + e^{-i(k\varphi+\chi)}) = 2c(\sqrt{5})^k \cos(k\varphi + \chi) \end{aligned}$$

zoals we wilden aantonen. In het voorbeeld op bladzijde 43 hebben we $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ genomen, waaruit we hebben afgeleid dat $C_1 = 1$ en $C_2 = -1$. Daar geldt dus $A_1 = \frac{1}{2}(1 + i)$ en $A_2 = \frac{1}{2}(1 - i)$ dus $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\chi = \frac{1}{4}\pi$ met als gevolg dat

$$x_k = \sqrt{2} (\sqrt{5})^k \cos\left(k\varphi + \frac{1}{4}\pi\right)$$

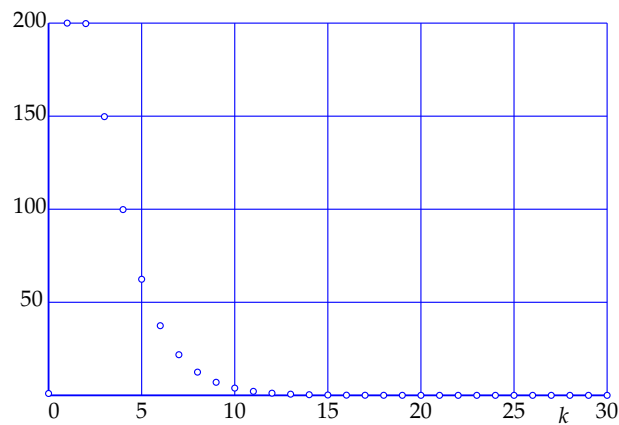
En voor de rij $\{y_k\}$ van bladzijde 42 geldt dus

$$y_k = \sqrt{2} \cos\left(k\varphi + \frac{1}{4}\pi\right)$$

zoals je waarschijnlijk zelf ook al hebt afgeleid.

4 Lineaire recursies

4.6 Hieronder zie je de oplossingsrij $\{x_k\}$ van het voorbeeld op de tegenoverliggende bladzijde met startwaarden $x_0 = 1$ en $x_1 = 200$. Controleer dat de punten x_2, x_3 en x_4 correct getekend zijn en bewijs dat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.



4.7 Bereken de oplossingsrij van elk van de volgende lineaire recurrente betrekkingen met de erbij gegeven startwaarden.

- $x_{k+1} = -4x_k - 4x_{k-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
- $x_{k+1} = 4x_k - 4x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
- $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4}x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$
- $x_{k+1} = -x_k - \frac{1}{4}x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$
- $x_{k+1} = -2x_k - x_{k-1}$, $x_0 = 10$, $x_1 = 1$

Samenvallende wortels

Voor de lineaire recurrente betrekking

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4} x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

is de karakteristieke vergelijking

$$\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = 0$$

De discriminant is nu nul en de enige wortel is $\alpha = \frac{1}{2}$. We vinden dus maar één basisoplossing $\{\frac{1}{2^k}\}$, en dat is niet genoeg om bij twee willekeurige startwaarden x_0 en x_1 een oplossingsrij te maken. Hieronder zullen we laten zien dat ook de rij $\{k \frac{1}{2^k}\}$ een oplossingsrij is. De algemene oplossing is nu dus van de vorm

$$x_k = A_1 \frac{1}{2^k} + A_2 k \frac{1}{2^k}$$

Bij gegeven startwaarden x_0 en x_1 , bijvoorbeeld $x_0 = -1$ en $x_1 = 2$, kun je nu weer de juiste A_1 en A_2 vinden door een (2×2) -stelsel op te lossen. In dit geval krijg je dan $A_1 = -1$ en $A_2 = 5$.

De algemene afleiding in het geval $D = 0$ gaat als volgt. In de betrekking

$$x_{k+1} = p x_k + q x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

geldt $D = p^2 + 4q = 0$ als $q = -\frac{1}{4}p^2$. In dat geval geeft de *abc*-formule als enige wortel van de karakteristieke vergelijking $\alpha = \frac{p}{2}$. De recurrente betrekking kun je nu helemaal in termen van α schrijven, want $p = 2\alpha$ en $q = -\frac{1}{4}p^2 = -\alpha^2$. Het resultaat is

$$x_{k+1} = 2\alpha x_k - \alpha^2 x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

Deel linker- en rechterlid door α^{k+1} en noem $y_k = x_k / \alpha^k$, dan ontstaat hieruit $y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1}$ oftewel $y_{k+1} - y_k = y_k - y_{k-1}$. Bijgevolg geldt voor iedere k

$$y_{k+1} - y_k = y_k - y_{k-1} = y_{k-1} - y_{k-2} = \dots = y_1 - y_0$$

Neem nu als startwaarden $x_0 = 0$, $x_1 = \alpha$, dus $y_0 = 0$ en $y_1 = 1$. Dan krijg je $y_2 = 2$, $y_3 = 3$ enzovoort, dus $y_k = k$ voor iedere k zodat $x_k = y_k \alpha^k = k \alpha^k$. We hebben hiermee een tweede basisoplossingsrij gevonden, namelijk $\{k \alpha^k\}$, naast de rij $\{\alpha^k\}$ die we al kenden want α is de (enige) oplossing van de karakteristieke vergelijking. De algemene oplossing in het geval $D = 0$ is dus

$$x_k = A_1 \alpha^k + A_2 k \alpha^k$$

zoals we wilden aantonen.

4 Lineaire recursies

Gemengde opgaven.

4.8 Geef bij de volgende lineaire recurrenthe betrekkingen de oplossingsrij die aan de gegeven startwaarden voldoet.

- a. $x_{k+1} = 2x_k + 3x_{k-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$
- b. $x_{k+1} = 3x_k - 2x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$
- c. $x_{k+1} = 4x_k - 13x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
- d. $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 2$, $x_1 = -1$
- e. $x_{k+1} = 3x_k - 3x_{k-1} + x_{k-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$
(Hint: $\alpha = 1$ is een oplossing van de karakteristieke vergelijking.)

Lineaire recursies van hogere orde

Wat we voor lineaire recurrente betrekkingen van de tweede orde hebben gedaan, kunnen we ook voor lineaire recurrente betrekkingen van hogere orde doen. We geven hier voor de volledigheid de resultaten kort en overzichtelijk weer, zonder op details in te gaan. Een lineaire recurrente betrekking van orde n heeft de vorm

$$x_{k+1} = p_1 x_k + p_2 x_{k-1} + \dots + p_n x_{k-n+1} \quad \text{voor } k = n-1, n, n+1, \dots$$

Een oplossingsrij wordt vastgelegd door n startwaarden x_0, \dots, x_{n-1} en de karakteristieke vergelijking is nu van de graad n , namelijk

$$\alpha^n - p_1 \alpha^{n-1} - \dots - p_{n-1} \alpha - p_n = 0$$

Als deze vergelijking n verschillende wortels heeft, leveren die n basisoplossingsrijen, waaruit door lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd. Als een wortel α multipliciteit m heeft met $m > 1$, dan zijn de volgende m rijen basisoplossingen:

$$\{\alpha^k\}, \quad \{k \alpha^k\}, \quad \{k^2 \alpha^k\}, \dots, \{k^{m-1} \alpha^k\}$$

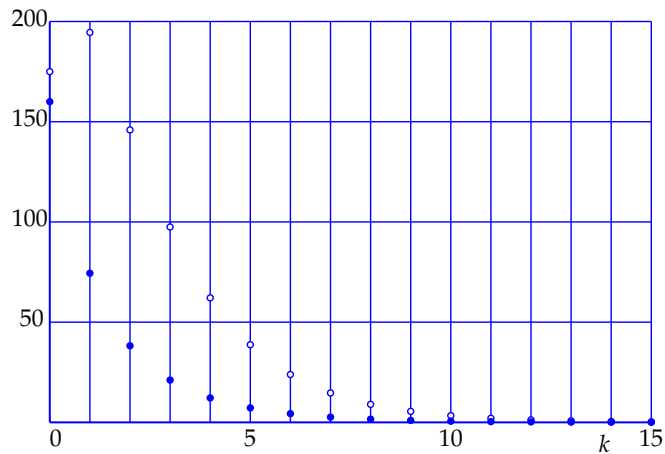
Zo krijg je dus in alle gevallen in totaal n basisoplossingen waarmee via lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd.

Realistische modellen

Met het bovenstaande is een wiskundig volledige behandeling gegeven van een bepaald type lineaire recursies (namelijk homogeen en met constante coëfficiënten). In veel toepassingen worden ze gebruikt om het verloop van een proces in de tijd te modelleren waarbij x_k de waarde voorstelt van een zekere grootte x op het tijdstip $t_k = t_0 + kT$. In het model worden zekere startwaarden x_0, x_1, \dots gegeven, waarna de recurrente betrekking het verdere verloop van de grootte x beschrijft. Omdat er daarbij na het opstarten van het proces geen verdere toevoegingen van buitenaf plaatsvinden, zal x op den duur in de ruststand terugkeren, dat wil zeggen dat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Dit is het geval als alle wortels α van de karakteristieke vergelijking, reëel of complex, voldoen aan $|\alpha| < 1$, met andere woorden, als ze binnen de eenheidscirkel liggen. In 'realistische' modellen zal dit altijd het geval zijn.

Je kunt opmerken dat de rij van Fibonacci (zie paragraaf), die oorspronkelijk bedoeld was om de groei van een konijnenpopulatie te modelleren, niet aan deze voorwaarde voldoet want een van de twee wortels, $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$, is groter dan 1. Maar dat is dan ook geen realistisch model want $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$. Het werkt hoogstens gedurende een beperkt tijdsbestek, en het gaat ook verder uit van tal van verregaande, irreële simplificaties. Het is overigens in toepassingen van de wiskunde heel gebruikelijk om te werken met modellen die slechts een beperkte geldigheid hebben.

4 Lineaire recursies



Ontwikkeling in de tijd van het economische model

$$p_k = 0.49 p_{k-1} + 0.68 q_{k-1}$$

$$q_k = 0.032 p_{k-1} + 0.43 q_{k-1}$$

waarin p_k (open punten) en q_k (dichte punten) de productie, respectievelijk de investering op tijdstip k voorstelt. Hier is $p_0 = 175$ en $q_0 = 160$ genomen.

Een economisch voorbeeld

In een leerboek economie vond ik het volgende eenvoudige model voor het verband tussen productie en investeringen. Productie wordt gemodelleerd door een rij $\{p_k\}$ en investeringen door $\{q_k\}$ waarbij p_k en q_k de productie, respectievelijk de investering op tijdstip k voorstelt. Het model is

$$\begin{aligned} p_k &= 0.49 p_{k-1} + 0.68 q_{k-1} \\ q_k &= 0.032 p_{k-1} + 0.43 q_{k-1} \end{aligned}$$

De vraag is na te gaan hoe de rijen $\{p_k\}$ en $\{q_k\}$ zich in de tijd ontwikkelen bij gegeven startwaarden p_0 en q_0 . Voor de overzichtelijkheid formuleren we het probleem gelijk wat algemener, namelijk als

$$p_k = a p_{k-1} + b q_{k-1} \quad (4.1)$$

$$q_k = c p_{k-1} + d q_{k-1} \quad (4.2)$$

We kunnen dit als volgt vertalen naar een lineaire recurrente betrekking van orde 2 voor de rij $\{p_k\}$. Neem $k+1$ in plaats van k in vergelijking (4.1) en substitueer vervolgens eerst (4.2) en daarna (4.1) als volgt:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a p_k + b q_k = a p_k + b(c p_{k-1} + d q_{k-1}) = a p_k + bc p_{k-1} + db q_{k-1} \\ &= a p_k + bc p_{k-1} + d(p_k - a p_{k-1}) = (a+d)p_k + (bc-ad)p_{k-1} \end{aligned}$$

De startwaarden zijn p_0 en $p_1 = a p_0 + b q_0$ en de karakteristieke vergelijking is

$$\alpha^2 - (a+d)\alpha + (ad-bc) = 0$$

met discriminant $D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$. In het gegeven voorbeeld was $a = 0.49$, $b = 0.68$, $c = 0.032$ en $d = 0.43$ dus $D = 0.09064$. De twee wortels van de karakteristieke vergelijking zijn $\alpha_1 = 0.6105323885$ en $\alpha_2 = 0.3094676115$ en de algemene oplossing is dus van de vorm

$$p_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k$$

Omdat de beide wortels in absolute waarde kleiner dan 1 zijn, zal $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0$. Dezelfde methode toegepast op rij $\{q_k\}$ levert merkwaardigerwijs *dezelfde* recurrente betrekking op (ga na!). Alleen de startwaarden zijn anders, namelijk q_0 en $q_1 = c p_0 + d q_0$. In dit model geldt dus ook $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0$, met andere woorden, in het model komen de productie en de investeringen op den duur tot stilstand.

Samenvatting

Een homogene lineaire recurrente betrekking van de tweede orde met constante (reële) coëfficiënten p en q voor een getallenrij x_0, x_1, x_2, \dots kan worden geschreven als:

$$x_{k+1} = p x_k + q x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

Karakteristieke vergelijking: $\alpha^2 - p\alpha - q = 0$.

Oplossingen via de *abc*-formule: $\alpha_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$.

Discriminant $D = p^2 + 4q$. Drie gevallen:

1. $D > 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee verschillende reële oplossingen α_1 en α_2 . Basisoplossingen van de recurrente betrekking zijn dan $\{\alpha_1^k\}$ en $\{\alpha_2^k\}$. De algemene oplossing is

$$x_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

Bij gegeven startwaarden x_0 en x_1 kun je A_1 en A_2 vinden door $k = 0$ en $k = 1$ in te vullen. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden A_1 en A_2 , namelijk $A_1 + A_2 = x_0$, $A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = x_1$ en daaruit kun je A_1 en A_2 oplossen.

2. $D = 0$. Dan is $\alpha = \frac{p}{2}$ de enige oplossing van de karakteristieke vergelijking. Basisoplossingen zijn dan $\{\alpha^k\}$ en $\{k\alpha^k\}$ en de algemene oplossing is

$$x_k = A_1 \alpha^k + A_2 k \alpha^k \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

Bij gegeven startwaarden x_0 en x_1 kun je A_1 en A_2 vinden door $k = 0$ en $k = 1$ in te vullen en het resulterende stelsel op te lossen.

3. $D < 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee toegevoegd complexe oplossingen $\alpha_1 = a + ib$ en $\alpha_2 = a - ib$. In de polaire notatie:

$$\alpha_1 = r e^{i\varphi} \quad \alpha_2 = r e^{-i\varphi}$$

De basisoplossingen zijn nu

$$\{\alpha_1^k\} = \{r^k e^{ik\varphi}\} \quad \text{en} \quad \{\alpha_2^k\} = \{r^k e^{-ik\varphi}\}$$

en de algemene oplossing kan met behulp van de formules van Euler worden geschreven als

$$x_k = r^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi)) = 2c r^k \cos(k\varphi + \chi) \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

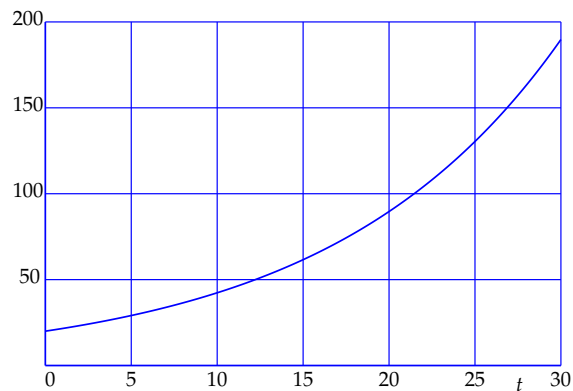
Bij gegeven startwaarden x_0 en x_1 kun je C_1 en C_2 vinden door $k = 0$ en $k = 1$ in te vullen en het resulterende stelsel op te lossen. Vervolgens kun je (desgewenst) c en χ berekenen via $C_1 - i C_2 = 2c e^{i\chi}$.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

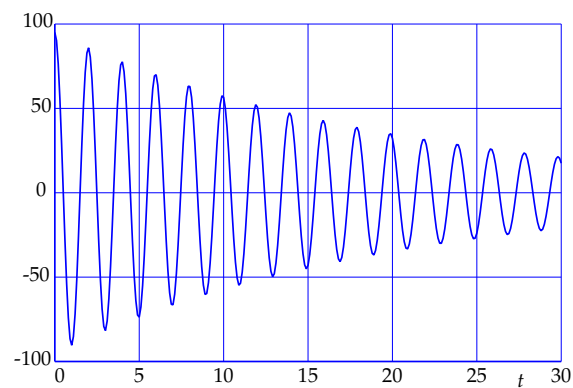
In veel toepassingen in de techniek en de exacte wetenschappen wordt gewerkt met *differentiaalvergelijkingen* om continue processen te modelleren. Het gaat dan meestal om een functie $y(t)$ die een grootte beschrijft die in de tijd varieert. In zo'n model kunnen wetmatigheden in het proces uitgedrukt worden in vergelijkingen waarin naast de functie $y(t)$ zelf ook de afgeleiden $y'(t)$, $y''(t)$, ... voorkomen. Men spreekt dan over differentiaalvergelijkingen. De *orde* van zo'n differentiaalvergelijking wordt bepaald door de hoogste afgeleide die erin voorkomt. Bij differentiaalvergelijkingen van de eerste orde komt naast $y(t)$ alleen $y'(t)$ voor, bij differentiaalvergelijkingen van de tweede orde speelt ook $y''(t)$ mee enzovoort. In dit hoofdstuk bespreken we zogenaamde *lineaire* differentiaalvergelijkingen. Net als bij de lineaire recursies kun je ook hier een *karakteristieke vergelijking* opstellen waarvan de wortels bepalend zijn voor het gedrag van de oplossingen. En ook hier kun je met complexe getallen de oplossingsfuncties (nu zijn het oplossingsfuncties en niet oplossingsrijen) gemakkelijk bepalen.

5

Lineaire differentiaalvergelijkingen



Een voorbeeld van een continu exponentieel groeimodel, gegeven door de differentiaalvergelijking $y'(t) = ay(t)$. Hier is $y(0) = 20$ en $a = 0.075$.



Een voorbeeld van een gedempte trilling bij een massa-veersysteem met als differentiaalvergelijking $mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$. Hier is $m = 1$, $d = 0.1$, $k = 10$ genomen met beginwaarden $u(0) = 95$ en $u'(0) = -1$.

Inleiding

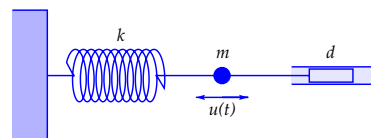
Een vergelijking waarin naast een functie $y(t)$ ook nog een of meer afgeleiden van $y(t)$ voorkomen, heet een differentiaalvergelijking. Een van de eenvoudigste voorbeelden is de differentiaalvergelijking

$$y'(t) = ay(t)$$

die voor $a > 0$ continue exponentiële groei modelleert. Een *oplossing* is een functie $y(t)$ die voor alle t aan de differentiaalvergelijking voldoet. In het algemeen zijn er oneindig veel oplossingen, die in dit geval allemaal van de vorm $y(t) = Ae^{at}$ zijn. Een *startwaarde*, bijvoorbeeld $y(0)$, legt de constante A vast.

In dit hoofdstuk behandelen we zogenaamde lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, dat wil zeggen dat er naast $y(t)$ ook nog de eerste afgeleide $y'(t)$ en de tweede afgeleide $y''(t)$ in voorkomen. Een natuurkundig voorbeeld waarin zo'n differentiaalvergelijking gebruikt wordt, is het zogenaamde *massaveersysteem*.

Stel dat een puntmassa m bevestigd is aan een veer met veerconstante k en een demper met wrijvingsfactor d . Onder $u(t)$ verstaan we de uitwijking van de massa vanuit de evenwichtsstand op tijdstip t .

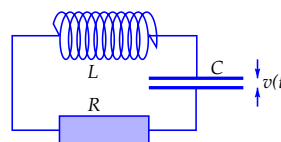


De massa is dan onderhevig aan twee terugdrijvende krachten: de veerkracht die evenredig is aan de uitwijking $u(t)$ en de dempingskracht die evenredig is met de snelheid $u'(t)$. Volgens de wet van Newton is de som van die krachten gelijk aan de massa m maal de versnelling $u''(t)$, dus $mu''(t) = -ku(t) - du'(t)$ oftewel

$$mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$$

Wanneer men zo'n systeem op $t = 0$ een bepaalde beginuitwijking $u(0)$ en beginsnelheid $u'(0)$ geeft, zal het een gedempte trilling gaan uitvoeren.

Een ander voorbeeld komt uit de electrotechniek. In een stroomkring zijn een weerstand R , een condensator met capaciteit C en een inductiespoel met zelfinductie L in serie geschakeld. We meten het spanningsverschil $v(t)$ over de condensator.



Men kan aantonen dat $v(t)$ dan voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = 0$$

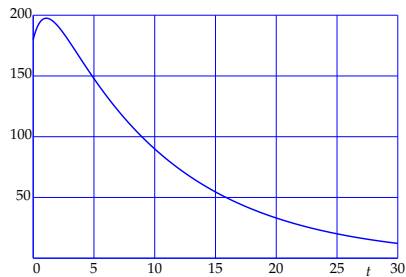
Ook hier is het zo dat het systeem bij gegeven beginwaarden $v(0)$ en $v'(0)$ een gedempte trilling gaat uitvoeren. In dit hoofdstuk zullen we algemene formules afleiden voor de oplossingsfuncties van dit soort differentiaalvergelijkingen.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

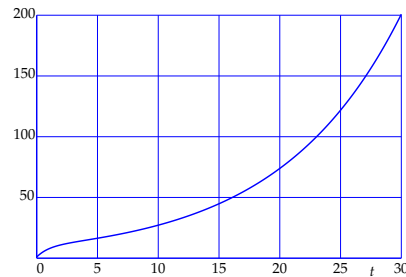
Hieronder zie je enige voorbeelden van grafieken van oplossingsfuncties van lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

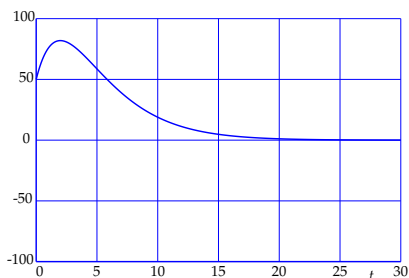
De grafieken geven een indruk van de grote verscheidenheid aan verschijningsvormen van zulke oplossingsfuncties. Telkens zijn de waarden van a , b en c en de beginwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ gegeven.



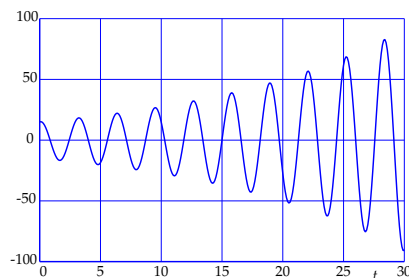
$$a = 1, b = 1.1, c = 0.1 \\ y(0) = 180, y'(0) = 40$$



$$a = 1, b = 0.9, c = -0.1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 10$$



$$a = 1, b = 0.7, c = 0.1225 \\ y(0) = 50, y'(0) = 40$$



$$a = 1, b = -0.12, c = 4 \\ y(0) = 15, y'(0) = 5$$

5.1 Bereken bij elk van de vier hierboven gegeven differentiaalvergelijkingen de wortels en de discriminant van de karakteristieke vergelijking.

Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 2

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

waarbij a , b en c willekeurige gegeven reële constanten zijn met $a \neq 0$, heet een *lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde*. Eigenlijk is de volledige term: *lineaire homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten* maar wij zullen die uitgebreide terminologie hier niet gebruiken en ook niet toelichten. Omdat $a \neq 0$ is, kunnen we de vergelijking delen door a , met andere woorden, we kunnen veronderstellen dat $a = 1$. Met het oog op de vele toepassingen waarin a , b en c vaak een specifieke fysische betekenis hebben, zullen we dit hier echter niet doen.

We zullen in dit hoofdstuk een algemene oplossingsmethode presenteren, dat wil zeggen een methode waarmee je een formule kunt vinden voor $y(t)$ in termen van a , b en c en zekere *startwaarden*, die hier de vorm hebben van $y(0) = y_0$ en $y'(0) = m_0$. Met andere woorden, op het tijdstip $t = 0$ zijn de functiewaarde $y(0)$ en de afgeleide $y'(0)$ gegeven. We zullen zien dat daardoor de oplossingsfunctie $y(t)$ volledig wordt bepaald.

Het idee is als volgt. We laten de startwaarden voorlopig even terzijde, en concentreren ons op de differentiaalvergelijking zelf. Geïnspireerd door het continue exponentiële groeimodel proberen we of er oplossingsfuncties zijn van de vorm $y(t) = e^{\lambda t}$ (λ is de Griekse letter 'lambda'). Invullen in de differentiaalvergelijking geeft dan $a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$, oftewel, na delen door $e^{\lambda t}$,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dit is de *karakteristieke vergelijking* van de differentiaalvergelijking. Elke wortel λ geeft een oplossing $e^{\lambda t}$. Je ziet dat in de karakteristieke vergelijking de variabele t niet meer voorkomt! Het is een zuiver algebraïsche vergelijking. De aard van de oplossingen wordt bepaald door het teken van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Als $D > 0$ is, zijn de twee wortels reëel, als $D = 0$ zijn ze reëel en vallen ze samen, en als $D < 0$ zijn ze toegevoegd complex.

We behandelen de drie gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$ aan de hand van voorbeelden. Maar eerst merken we op dat voor lineaire differentiaalvergelijkingen ook weer het *superpositiebeginsel* geldt: als $y_1(t)$ en $y_2(t)$ allebei oplossingsfuncties zijn, dan is voor elke keuze van A_1 en A_2 ook de *lineaire combinatie* $z(t) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$ een oplossingsfunctie. Je kunt dit zelf gemakkelijk nagaan.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

5.2 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

- $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$
- $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $6y''(t) + 5y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

5.3 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

- $y''(t) - y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
- $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
- $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

5.4 In deze opgave leer je de achtergrond van de op de tegenoverliggende bladzijde gegeven oplossingsmethode voor het geval $D = 0$. Stel voor het gemak dat de differentiaalvergelijking de volgende vorm heeft

$$y''(t) - 2py'(t) + p^2y(t) = 0$$

De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 2p\lambda + p^2 = 0$ heeft discriminant $D = 0$. De enige wortel is $\lambda = p$. Stel nu $z(t) = e^{-pt}y(t)$, met andere woorden, $y(t) = e^{pt}z(t)$. Dat lijkt een vreemde truc, maar we zullen laten zien dat de oorspronkelijke differentiaalvergelijking voor de functie $y(t)$ hierdoor getransformeerd wordt in een zeer eenvoudig oplosbare differentiaalvergelijking voor $z(t)$. En hebben we $z(t)$ gevonden, dan hebben we ook $y(t)$ te pakken!

- Bereken $y'(t)$ en $y''(t)$ door differentiëren met de productregel en de kettingregel van $y(t) = e^{pt}z(t)$.
- Laat hiermee zien dat

$$y''(t) - 2py'(t) + p^2y(t) = e^{pt}z''(t)$$

- Concludeer hieruit dat $z(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $z''(t) = 0$ (bedenk dat een e-macht nooit nul is!).
- Leid hieruit af dat $z(t) = A_1 + A_2t$ voor zekere constanten A_1 en A_2 . (Hint: twee maal integreren.)
- Concludeer hieruit dat de algemene oplossingsfunctie van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking gelijk is aan

$$y(t) = (A_1 + A_2t)e^{pt}$$

Positieve discriminant

Als $D = b^2 - 4ac > 0$ is, zijn er twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2 van de karakteristieke vergelijking, en de algemene oplossing heeft dan de gedaante

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Merk op dat

$$y'(t) = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}$$

en dus geldt $y(0) = A_1 + A_2$ en $y'(0) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$.

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

De wortels van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ zijn $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -1$. Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$ gegeven zijn, kun je A_1 en A_2 oplossen uit de vergelijkingen $A_1 + A_2 = 1$ en $2A_1 - A_2 = -2$. De oplossing van dit stelsel is $A_1 = -\frac{1}{3}$ en $A_2 = \frac{4}{3}$. De oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t}$$

Discriminant nul

Als $D = b^2 - 4ac = 0$ is, is er maar één oplossing, namelijk $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Naast de basisoplossingsfunctie $y_1(t) = e^{\lambda t}$ is er dan ook een basisoplossingsfunctie $y_2(t) = te^{\lambda t}$. De algemene oplossing is dan

$$y(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = (A_1 + tA_2) e^{\lambda t}$$

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

De enige oplossing van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ is $\lambda = -2$ en de algemene oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = (A_1 + tA_2) e^{-2t}$$

Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ gegeven zijn, vinden we $A_1 = -1$ en $A_2 = -2$ (controleer!), dus dan is de gezochte oplossingsfunctie

$$y(t) = (-1 - 2t) e^{-2t}$$

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

5.5 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

- $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$
- $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $y''(t) - 2y'(t) + 10y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

5.6 Schrijf alle oplossingsfuncties van de vorige opgave in de vorm

$$y(t) = 2r e^{pt} \cos(qt + \chi)$$

5.7 Op bladzijde 55 zijn voorbeelden gegeven van differentiaalvergelijkingen voor massaveersystemen en stroomkringen. Ga na dat in het theoretische geval van wrijving nul ($d = 0$), respectievelijk weerstand nul ($R = 0$), alle oplossingsfuncties zuivere sinusoiden zijn ('harmonische trillingen'). Wat is de frequentie in termen van m en k , respectievelijk L en C ? (Bedenk dat die constanten positief zijn op fysische gronden). Hoe hangt de amplitude af van de beginwaarden $u(0)$ en $u'(0)$, respectievelijk $v(0)$ en $v'(0)$?

(Bij de standaardsinusoïde $A \cos(qt + \chi)$ met $A > 0$ en $q > 0$ heet A de amplitude, $\frac{q}{2\pi}$ de frequentie en χ de fasehoek.)

5.8 Toon aan dat $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ voor een massaveersysteem met een positieve wrijving d en dat $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ voor een stroomkring met een positieve weerstand R . Onderscheid hierbij de gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$ maar gebruik wel dat alle fysische constanten (m , d en k , respectievelijk L , C en R) positief zijn.

Negatieve discriminant

We beginnen met een voorbeeld, namelijk de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

Deze heeft als karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

met discriminant $D = 4 - 20 = -16 < 0$. De twee wortels zijn $\lambda_1 = 1 + 2i$ en $\lambda_2 = 1 - 2i$, en de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus (vergelijk ook paragraaf op bladzijde 43)

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(1+2i)t} + A_2 e^{(1-2i)t} \\ &= e^t (A_1 e^{2it} + A_2 e^{-2it}) \\ &= e^t ((A_1 + A_2) \cos 2t + i(A_1 - A_2) \sin 2t) \\ &= e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \end{aligned}$$

Kies je voor C_1 en C_2 reële constanten, dan is de oplossingsfunctie ook reël. In dat geval is $A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2)$ en $A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2)$ (vergelijk bladzijde 45) dus dan zijn A_1 en A_2 toegevoegd complex.

De oplossingsfunctie $y(t)$ kun je dan ook schrijven als het product van een e-macht en een standaardsinusoïde. Dat is voor de toepassingen, waarin uit de standaardvorm van een sinusoïde belangrijke constanten zoals de amplitude en de fasehoek kunnen worden gehaald, vaak van groot belang. Schrijf daartoe $A_1 = r e^{i\chi}$ en $A_2 = r e^{-i\chi}$ (χ is de Griekse letter 'chi'). Dan is

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t (A_1 e^{2it} + A_2 e^{-2it}) = e^t (r e^{i\chi} e^{2it} + r e^{-i\chi} e^{-2it}) \\ &= r e^t (e^{i(2t+\chi)} + e^{-i(2t+\chi)}) = 2r e^t \cos(2t + \chi) \end{aligned}$$

Voor een willekeurige differentiaalvergelijking met een karakteristieke vergelijking met een negatieve discriminant met wortels $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ kan de algemene reële oplossing geschreven worden als

$$y(t) = e^{pt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) = 2r e^{pt} \cos(qt + \chi)$$

waarbij $C_1 - iC_2 = 2A_1 = 2r e^{i\chi}$. Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ geldt $y(0) = C_1$ en $y'(0) = pC_1 + qC_2$ dus $C_2 = -\frac{p}{q}y(0) + \frac{1}{q}y'(0)$.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Gemengde opgaven.

5.9 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

a. $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

b. $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$

c. $y''(t) + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$

d. $y''(t) - y'(t) - 12y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

e. $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

f. $y^{(3)}(t) - 2y'(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 0$

g. $y^{(3)}(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Wat we voor lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde hebben gedaan, kunnen we ook voor lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde doen. Zo'n vergelijking heeft de vorm

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Een oplossingsfunctie $y(t)$ wordt vastgelegd door n beginvoorwaarden $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ en de karakteristieke vergelijking is nu van de graad n , namelijk

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Wanneer deze vergelijking n verschillende (reële of complexe) wortels heeft, leveren die n basisoplossingsfuncties, waaruit door lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd. Wanneer een wortel λ multiplicitéit m heeft met $m > 1$, dan zijn de volgende m functies basisoplossingsfuncties:

$$e^{\lambda t}, \quad t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{m-1} e^{\lambda t}$$

Op deze manier leveren de oplossingen van de karakteristieke vergelijking dus in alle gevallen n basisoplossingen waarmee de algemene oplossing kan worden gevormd.

Realistische modellen

Wanneer een lineaire differentiaalvergelijking een wiskundig model is van een proces waarin de evolutie in de tijd van een grootte y gemodelleerd wordt als een differentieerbare functie $y(t)$ die op elk tijdstip t aan de differentiaalvergelijking voldoet, wordt die evolutie volledig bepaald door de differentiaalvergelijking en de n beginvoorwaarden. In zulke situaties zal het systeem op den duur naar de ruststand terugkeren, dat wil zeggen dat $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Dit is het geval als alle wortels λ van de karakteristieke vergelijking, reëel of complex, voldoen aan $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, met andere woorden, als ze in het linkerhalfvlak liggen. In 'realistische' modellen zal dit altijd het geval zijn.

Bij massa-veersystemen en bij stroomkringen met een weerstand, condensator en inductiespoel is dat altijd het geval als de dempingsfactor, respectievelijk de weerstand, positief is. In de geïdealiseerde toestand zonder demping of weerstand blijft het systeem eeuwig oscilleren volgens een sinusöide (harmonische trilling).

Samenvatting

Een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante (reële) coëfficiënten a , b en c (waarbij $a \neq 0$) voor een functie $y(t)$ kan geschreven worden als

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Karakteristieke vergelijking: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Oplossingen via de abc -formule: $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$. Drie gevallen:

1. $D > 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2 . Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan $e^{\lambda_1 t}$ en $e^{\lambda_2 t}$. De algemene oplossing is

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je A_1 en A_2 vinden met behulp van de afgeleide

$$y'(t) = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

door $t = 0$ in te vullen in de uitdrukkingen voor $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden A_1 en A_2 en daaruit kun je A_1 en A_2 oplossen.

2. $D = 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking één oplossing $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dan $e^{\lambda t}$ en $t e^{\lambda t}$. De algemene oplossing is

$$y(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t}$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je A_1 en A_2 vinden met behulp van de afgeleide door $t = 0$ in te vullen in $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden A_1 en A_2 en daaruit kun je A_1 en A_2 oplossen.

3. $D < 0$. Dan heeft de karakteristieke vergelijking twee toegevoegd complexe oplossingen $\lambda_1 = p + iq$ en $\lambda_2 = p - iq$. Basisoplossingen van de differentiaalvergelijking zijn $e^{\lambda_1 t} = e^{pt} e^{iqt}$ en $e^{\lambda_2 t} = e^{pt} e^{-iqt}$. De algemene oplossing kan dan met behulp van de formules van Euler worden geschreven als

$$y(t) = e^{pt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) = 2r e^{pt} \cos(qt + \chi)$$

Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ kun je C_1 en C_2 vinden met behulp van de afgeleide door $t = 0$ in te vullen in $y(t)$ en $y'(t)$. Dit geeft twee vergelijkingen voor de twee onbekenden C_1 en C_2 . Desgewenst kun je daarna ook r en χ berekenen via de betrekking $C_1 - iC_2 = 2r e^{i\chi}$.

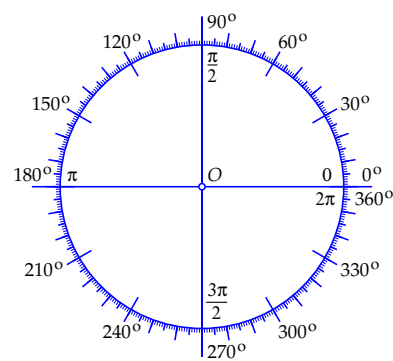
Voorkennis

Hoekmeting

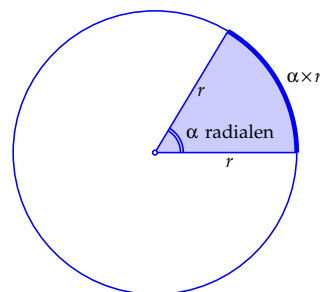
Hoeken meten we in *graden* of in *radialen*. Hiernaast zie je de eenheidscirkel in het vlak (de cirkel met straal 1 en de oorsprong O als middelpunt) waarop de beide verdelingen zijn aangegeven. Een volledige rondgang telt 360 graden, oftewel 2π radialen.

Ook draaiingshoeken kunnen we in graden of in radialen meten. De *draaiingsrichting* is dan wel van belang: volgens afspraak geven we draaiingen in het vlak tegen de klok in met een plusteken aan, en draaiingen met de klok mee met een minteken.

Bij draaiingen kan de draaiingshoek natuurlijk ook groter dan 360° zijn. Voor het resultaat maakt het niets uit of je er gehele veelvoud van 360° (of 2π radialen) bij optelt of van aftrekt.



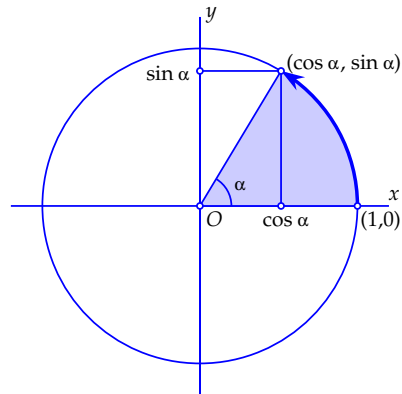
De term *radiaal* komt van *radius*, hetgeen straal betekent. Wanneer je op een cirkel met straal r een boog tekent die vanuit het middelpunt onder een hoek van α radialen wordt gezien, is de lengte van die boog $\alpha \times r$. De hoekmaat in radialen geeft dus de verhouding tussen de booglengte en de straal, vandaar de naam radiaal. Een hoek van 1 radiaal is iets kleiner dan 60 graden, namelijk, in acht decimalen nauwkeurig, 57.29577950 graden. De exacte waarde is $360/(2\pi)$.



Bij een cirkel met straal $r = 1$ is de booglengte precies *gelijk* aan de middelpuntshoek α in radialen. Bij een volledige rondgang langs een cirkel hoort een draaiingshoek van 2π radialen. De omtrek van de eenheidscirkel is dus ook gelijk aan 2π . De omtrek van een cirkel met een straal r is $2\pi r$.

De sinus, de cosinus en de tangens

Bij elke draaiingshoek α hoort een draaiing in het vlak om de oorsprong over die hoek. Een positieve draaiingshoek correspondeert met een draaiing tegen de klok in, een negatieve hoek hoort bij een draaiing met de klok mee. We kunnen zo'n draaiing aangeven via een boog van de eenheidscirkel die in $(1,0)$ begint en middelpuntshoek α heeft. De coördinaten (x, y) van het eindpunt zijn dan respectievelijk de *cosinus* en de *sinus* van α , dus $x = \cos \alpha$ en $y = \sin \alpha$.



Omdat (x, y) op de eenheidscirkel ligt, geldt $x^2 + y^2 = 1$, dus

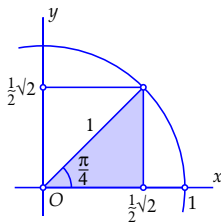
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Let hierbij op de notatie: $\cos^2 \alpha$ betekent $(\cos \alpha)^2$ en $\sin^2 \alpha$ betekent $(\sin \alpha)^2$. Deze notatievormen zijn algemeen gebruikelijk.

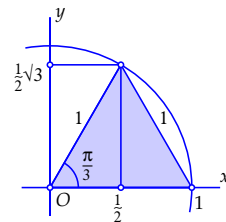
De *tangens* van α is het quotiënt van de sinus en de cosinus, in formule:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

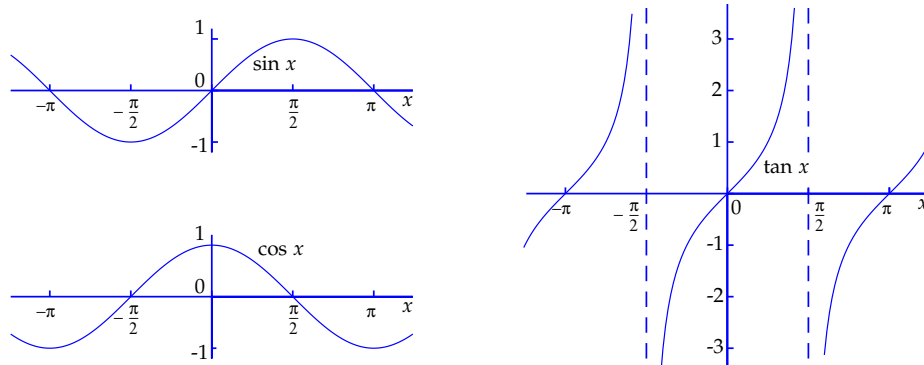
Er zijn enige hoeken α met bijzondere waarden voor de sinus, de cosinus en de tangens. Voor $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (in radialen) geven we ze in de vorm van een tabel. Uit de beide tekeningen kun je die waarden afleiden. Bedenk daarbij dat de linkerdriehoek de vorm heeft van een 'geodriehoek' met een schuine zijde van lengte 1 en rechthoekszijden van lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (stelling van Pythagoras). De rechterdriehoek is gelijkzijdig met zijden van lengte 1. De verticale lijn vanuit de top deelt de basis middendoor, en volgens Pythagoras is de lengte ervan dus gelijk aan $\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.



α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-



Grafieken van goniometrische functies



Hierboven zijn de grafieken getekend van de functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$, met x in radialen. Die functies zijn *periodiek*: de sinus en de cosinus met periode 2π , de tangens met periode π . De tangens heeft verticale asymptoten voor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met k geheel, want voor die waarden van x is de cosinus nul, en dan is $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ dus niet gedefinieerd.

Uit de definitie van de sinus, de cosinus en de tangens met behulp van de eenheidscirkel (zie bladzijde 66) volgen direct de volgende eigenschappen, die je ook in de grafieken terugziet:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

Optelformules en dubbele-hoekformules

Naast de basisformule $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ en de 'symmetrievormules' van hierboven zijn er nog twee belangrijke goniöformules:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Als je in deze optelformules β vervangt door $-\beta$ krijg je

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Als je in de optelformules $\alpha = \beta$ neemt, krijg je de *dubbele-hoekformules*:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

Met behulp van $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ kun je de formule voor $\cos 2\alpha$ uitbreiden tot

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

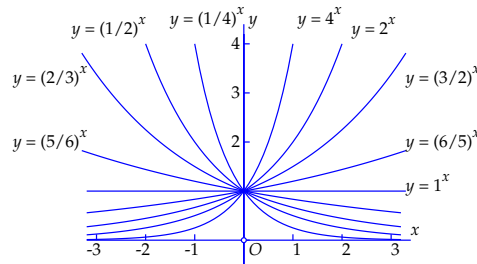
Exponentiële functies en de e-macht

Functies van de vorm $f(x) = a^x$ voor $a > 0$ heten *exponentiële functies*. Hieronder is voor enige waarden van a de grafiek van a^x getekend. Al die grafieken gaan door het punt $(0, 1)$ want voor elke a geldt $a^0 = 1$.

Zo'n grafiek is stijgend als $a > 1$, en dalend als $0 < a < 1$. Voor $a = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = 1$ want $1^x = 1$ voor elke waarde van x .

De grafieken van a^x en $(1/a)^x$ zijn elkaars spiegelbeeld in de y -as. Er geldt namelijk

$$(1/a)^x = (a^{-1})^x = a^{-x}$$

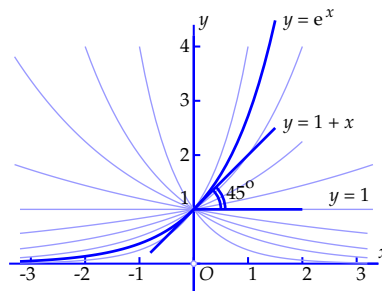


De belangrijkste eigenschappen van exponentiële functies zijn

$$\begin{aligned} a^x \times a^y &= a^{x+y} \\ a^x : a^y &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{x \times y} \\ (a \times b)^x &= a^x \times b^x \\ (a : b)^x &= a^x : b^x \end{aligned}$$

De grafieken van de exponentiële functies van de vorm $f(x) = a^x$ met $a > 0$ snijden de y -as allemaal in het punt $(0, 1)$. Alle grafieken hebben in dat punt een raaklijn. Al die raaklijnen zijn verschillend, en allemaal hebben ze een vergelijking van de vorm $y = 1 + mx$ voor een zekere m .

Er is precies één waarde van a waarvoor geldt $m = 1$, dat wil zeggen dat de lijn $y = 1 + x$ de raaklijn is aan de grafiek van $f(x) = a^x$ in $(0, 1)$. Dat getal wordt e genoemd, en de bijbehorende functie $f(x) = e^x$ speelt een belangrijke rol in de differentiaal- en integraalrekening. Hiernaast is de grafiek ervan getekend. Men kan bewijzen dat het getal e , net als het getal π of het getal $\sqrt{2}$, een *irrationaal* getal is. Er geldt $e = 2.718281828459\dots$



Voor kleine waarden van x vallen de grafiek van $f(x) = e^x$ en de raaklijn $y = 1 + x$ vrijwel samen, dus voor kleine x geldt $e^x \approx 1 + x$. Zelfs geldt dat $\frac{e^x - 1}{x} \approx 1$ voor $x \approx 0$, of, nog preciezer uitgedrukt met behulp van een limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

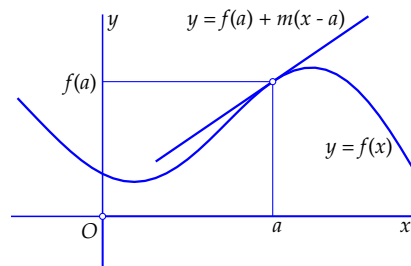
Raaklijn en afgeleide

(De voorkennis in deze paragraaf wordt alleen in hoofdstuk 5 gebruikt.)

De grafieken van veel functies hebben in alle of bijna alle punten een ‘glad’ verloop: als je steeds sterker op zo’n punt inzoomt, gaat de grafiek steeds meer op een rechte lijn lijken. Die lijn is de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Hiernaast is de grafiek van zo’n functie $f(x)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dat punt zijn grafiek en raaklijn inderdaad nauwelijks van elkaar te onderscheiden.

Als de raaklijn niet verticaal is, kan de vergelijking ervan geschreven worden als $y = f(a) + m(x - a)$ voor een zekere m , de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.



Die richtingscoëfficiënt m kan dan door middel van een limiet in termen van de functie $f(x)$ en het punt a worden uitgedrukt:

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Men noemt m de *afgeleide* van $f(x)$ in a , en gebruikt daarvoor de notatie $f'(a)$. Als deze limiet bestaat (als eindig getal), heet de functie $f(x)$ *differentieerbaar* in a .

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, is de afgeleide dus in elk punt van dat interval gedefinieerd, en daarmee is de afgeleide op dat interval zelf een functie geworden, de *afgeleide functie*. Veel gebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(x)$ zijn $f'(x)$ en $\frac{d}{dx}f(x)$.

De afgeleide functies van enige veel gebruikte functies zijn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^p) &= p x^{p-1} \quad \text{voor elke } p \\ \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \end{aligned}$$

De e-machtfunctie is dus gelijk aan zijn eigen afgeleide! Let ook op de tekens bij de afgeleiden van de sinus en de cosinus.

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, kan de afgeleide functie ook weer een differentieerbare functie zijn. De afgeleide van de afgeleide heet dan de *tweede afgeleide*. Notatie: $f''(x)$ of $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$. Zo kun je doorgaan en de n -de afgeleide definiëren voor elke $n > 2$. Gebruikelijke notaties zijn in dat geval $f^{(n)}(x)$ (let op de haakjes om de n) of $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Gonio gemakkelijk gemaakt

Eulers gemakkelijk te onthouden formule

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

maakt het makkelijk alle gonioformules te onthouden, of snel af te leiden als je ze vergeten bent. Bijvoorbeeld de somformules van bladzijde 67:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Bedenk hiervoor dat $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ dus

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)\end{aligned}$$

Gelijkstellen van de reële delen levert de somformule voor de cosinus, en gelijkstellen van de imaginaire delen de somformule voor de sinus.

Deze formules gelden overigens niet alleen maar voor de reële cosinus- en sinusfuncties, maar net zo goed voor de op bladzijde 21 gedefinieerde complexe uitbreidingen van deze functies:

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2\end{aligned}$$

Probeer zelf maar eens een bewijs te geven!

Ook de formules voor de afgeleiden van de sinus- en cosinusfuncties zijn gemakkelijk snel af te leiden via de complexe e-machtfunctie, die, net als de reële e-machtfunctie, gelijk is aan zijn eigen afgeleide. Bedenk daarvoor dat op grond van de kettingregel geldt dat $\frac{d}{dx} e^{ix} = i e^{ix}$, en dus is

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x + i \sin x) &= \frac{d}{dx} e^{ix} = i e^{ix} = i(\cos x + i \sin x) \\ &= -\sin x + i \cos x\end{aligned}$$

Gelijkstellen van reële delen geeft $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ en gelijkstellen van de imaginaire delen geeft $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

Antwoorden

1. Rekenen met complexe getallen

1.1 a. -9 b. -9 c. 16 d. i e. 1

1.2 a. $-\frac{1}{2}$ b. $-\frac{2}{3}$ c. -1 d. $-\frac{4}{3}$ e. $-\frac{3}{4}$

1.3 a. $\sqrt{3}i$ b. $3i$ c. $2\sqrt{2}i$ d. $5i$ e. $\sqrt{15}i$

1.4 a. $\sqrt{33}i$ b. $7i$ c. $4\sqrt{3}i$ d. $3\sqrt{5}i$ e. $5\sqrt{3}i$

1.5 a. $1 \pm i$ b. $-2 \pm i$ c. $-1 \pm 3i$ d. $3 \pm i$ e. $2 \pm 2i$

1.6 a. $6 \pm 2i$ b. $2 \pm \sqrt{2}i$ c. $-1 \pm \sqrt{3}i$ d. $3 \pm \sqrt{3}i$ e. $-4 \pm 2i$

1.7 Het eerste, het derde en het vierde gelijkteken zijn in orde, het eerste volgens de definitie van $\sqrt{-1}$ als een getal waarvoor het kwadraat gelijk is aan -1 , en het vierde volgens de definitie van $\sqrt{1}$ als het positieve reële getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 1 . Het derde gelijkteken geldt omdat $(-1)^2 = 1$. Het tweede gelijkteken kan dus niet geldig zijn. Blijkbaar geldt niet voor negatieve reële getallen a dat $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$. (Deze regel geldt wel als $a \geq 0$.)

Bij de volgende opgaven geven we alleen de uitkomst en de absolute waarde ervan. Teken ze zelf.

1.8 a. $4 - 6i, 2\sqrt{13}$ b. $-4 + 4i, 4\sqrt{2}$ c. $1, 1$ d. $3 - 3i, 3\sqrt{2}$ e. $5 - 3i, \sqrt{34}$

1.9 a. $-5 - 10i, 5\sqrt{5}$ b. $4 + 8i, 4\sqrt{5}$ c. $8, 8$ d. $-8 - 6i, 10$ e. $3 - 4i, 5$

1.10 a. $-i, 1$ b. $1, 1$ c. $i, 1$ d. $-1, 1$ e. $-1, 1$

1.11 a. $-i, 1$ b. $-8i, 8$ c. $128i, 128$ d. $-2 + 2i, 2\sqrt{2}$ e. $-2 - 2i, 2\sqrt{2}$

Bij de volgende opgaven geven de lijnen alleen als een vergelijking in xy -coördinaten. Teken ze zelf.

1.12 a. $x = 4$ b. $x = -3$ c. $y = 2$ d. $y = -2$ e. $x = y$

1.13 a. $x + y = 1$ b. $x = 2y$ c. $x - 2y = 1$ d. $x + y = 5$ e. $y = 0$

Bij de volgende opgaven geven we alleen het middelpunt en de straal.

1.14 a. $0, 4$ b. $1, 3$ c. $2, 2$ d. $3, 1$ e. $-1, 5$

1.15 a. $-3, 4$ b. $i, 5$ c. $-2i, 1$ d. $1 + i, 3$ e. $-3 + i, 2$

1.16 a. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ b. $\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$ c. $-\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i$ d. $\frac{11}{5} + \frac{3}{5}i$ e. $\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$

Antwoorden

- 1.17 a. $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ b. $-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ c. $-i$ d. $-3 - i$ e. i
1.18 a. $\frac{9}{25} + \frac{12}{25}i$ b. $\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ c. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ d. $-i$ e. i
1.19 a. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$ b. $\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$ c. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ d. $1 + 2i$ e. i

2. De meetkunde van het complexe rekenen

- 2.1 a. $-3i$ b. $-3 + i$ c. $3 - 5i$ d. -8 e. 0

2.2 Zelf doen

- 2.3 a. $\bar{z}z + iz - i\bar{z} - 8 = 0$ b. $\bar{z}z - (1 + i)z - (1 - i)\bar{z} = 0$ c. $\bar{z}z - z - \bar{z} = 0$
d. $\bar{z}z + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} + 1 = 0$ e. $\bar{z}z - (1 + 2i)z - (1 - 2i)\bar{z} + 4 = 0$

- 2.4 a. $(z + i)(\bar{z} - i) = 1$ dus middelpunt $-i$, straal 1
b. $(z + (1 - i))(\bar{z} + (1 + i)) = 4$ dus middelpunt $-1 + i$, straal 2
c. $(z - 2i)(\bar{z} + 2i) = 0$ dus middelpunt $2i$, straal 0
d. $(z + 2)(\bar{z} + 2) = -1$ dus geen cirkel
e. $(z + (2 + i))(\bar{z} + (2 - i)) = 6$ dus middelpunt $-2 - i$, straal $\sqrt{6}$

Bij de volgende twee opgaven geven we alleen de argumenten.

- 2.5 a. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b. $\pi + 2k\pi$ c. $2k\pi$ d. $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ e. $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
2.6 a. $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ b. $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ c. $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ d. $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ e. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
2.7 a. i b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ c. i d. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ e. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$
2.8 a. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ b. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ c. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ d. $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$
e. $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
2.9 a. -1 b. 1 c. i d. -1 e. 1
2.10 a. i b. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ c. i d. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ e. 1
2.11 a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ b. -1 c. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ d. -1 e. -1
2.12 a. i b. i c. $-i$ d. i e. -1

In de volgende twee opgaven kiezen we het argument steeds in het interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

- 2.13 a. $2.2361e^{1.1072i}$ b. $4.4721e^{-0.4636i}$ c. $3.6056e^{-0.9828i}$ d. $3.6056e^{4.1244i}$
e. $3e^{3.1416i}$
2.14 a. $2.2361e^{.4636i}$ b. $2.2361e^{-0.4636i}$ c. $e^{-1.5708i}$ d. $5.0990e^{2.9442i}$
e. $3e^{-1.5708i}$
2.15 a. $-0.8323 + 1.8186i$ b. $1.6209 - 2.5244i$ c. $0.1911 + 0.0591i$
d. $-0.9614 + 0.7182i$ e. $-1.0000 + 0.0001i$
2.16 a. $3e^{2i}$ b. $9e^{-4i}$ c. $243e^{10i}$ d. $\frac{1}{3}e^{2i}$ e. $3^n e^{-2ni}$
2.17 a. $\overline{z_1 z_2} = \overline{2e^{5i} 3e^{-2i}} = \overline{6e^{3i}} = 6e^{-3i} = 2e^{-5i} 3e^{2i} = \overline{z_1} \overline{z_2}$.
Onderdeel (b.) gaat op dezelfde manier.
2.18 a. $\overline{z_1 z_2} = \overline{r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2}} = \overline{r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}} = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 e^{-i\varphi_1} r_2 e^{-i\varphi_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$.
Onderdeel (b.) gaat op dezelfde manier.

- 2.19 a. $-3.0749 + 6.7188i$ b. $10.8523 - 16.9014i$ c. $1.1669 + 0.3609i$
d. $-2.6599 + 1.9870i$ e. $-0.6065 + 0.0010i$
- 2.20 a. $0.0269 + 0.0419i$ b. $17.6267 - 9.6295i$ c. $-0.1340 - 0.0191i$
d. $0.1044 - 0.3528i$ e. $-2.2033 + 0.3141i$
- 2.21 a. 1.5431 b. -1.5431 c. $-3.6269i$ d. $-9.1545 + 4.1689i$ e. $-9.1545 + 4.1689i$
- 2.22 a. Op de y -as geldt dat $x = 0$, dus $e^z = e^{iy}$ en als y van 0 naar 2π loopt, doorloopt e^{iy} de gehele eenheidscirkel.
b. Eigenlijk vallen ze samen, maar op deze manier getekend zie je duidelijker hoe dit stukje y -as wordt afgebeeld.
c. De horizontale lijnen in het z -vlak zijn de lijnen $y = \frac{k}{6}\pi$ voor $k = 0, 1, \dots, 12$. Ze komen in het w -vlak terecht op de getekende stralen. Als x daarbij van min oneindig naar plus oneindig loopt, wordt zo'n straal doorlopen vanaf de oorsprong naar oneindig.
d. Nee. Als $w = e^{x+iy} = 0$ zou zijn, zou de absolute waarde ook 0 zijn. Die is e^x , maar dat is positief voor elke x .
e. De cirkels in het w -vlak met middelpunt 0 en straal respectievelijk e en $e^{-1} = \frac{1}{e}$.
f. De eenheidscirkel, die oneindig vaak wordt doorlopen als y van min oneindig naar plus oneindig loopt.
g. $z = \frac{1}{2}\pi i$ heeft als beeld $w = i$, maar omdat e^z periodiek is met periode $2\pi i$ worden alle punten $z = \frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i$ (k geheel) ook op i afgebeeld.

3. Wortels en polynomen

- 3.1 a. $e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) b. $e^{(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) c. $e^{(\frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
d. $2e^{(\frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) e. $2e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
- 3.2 a. $\sqrt[6]{2}e^{(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) b. $3e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) c. $3e^{(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
d. $e^{(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) e. $2e^{k\pi i}$ ($k = 0, 1$) (dit zijn de getallen 2 en -2)
- 3.3 a. $e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) b. $e^{(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) c. $e^{(\frac{2k\pi}{5})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)
d. $\sqrt[4]{5}e^{(-0.2318 + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) e. $\sqrt[6]{6}e^{(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)
- 3.4 a. $\sqrt[8]{2}e^{(-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) b. $2e^{(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)
c. $3e^{(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) d. $\sqrt[7]{2}e^{(\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7})i}$ ($k = 0, \dots, 6$) e. $\sqrt[6]{18}e^{(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
- 3.5 a. $z^2 - 1$ b. $z^2 - 6z + 5$ c. $z^2 - (1 + i)z + i$ d. $z^2 + iz + 2$ e. $z^2 - 2z + 2$
- 3.6 a. $z^2 + iz$ b. $z^2 - 3z + 2$ c. $z^2 + 2iz$ d. $z^2 - 2z + 5$ e. $z^2 - 2iz - 2$
- 3.7 a. $z^3 - z$ b. $z^3 + z$ c. $z^3 - z^2 + z - 1$ d. $z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i$ e. $z^3 - iz^2 - z + i$
- 3.8 a. $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$ b. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ c. $z^3 - 3z^2 + 2z$ d. $z^3 - (1 + i)z^2 + iz$
e. $z^3 - 2iz^2 + z - 2i$
- 3.9 a. $z^3 - 2z^2$ b. $z^3 + 3z$ c. $z^4 - 1$ d. $z^3 - 2z^2 + z - 2$ e. $z^3 - iz^2 - z + i$
f. $z^3 + iz^2 + z + i$
- 3.10 a. enkelvoudig, $z = 0$ (tweevoudig), $z = 2$ b. enkelvoudig, $z = 0$, $z = \sqrt{3}i$,
 $z = -\sqrt{3}i$ c. tweevoudig, $z = 1$, $z = -1$, $z = -i$ d. tweevoudig, $z = i$, $z = -i$
e. enkelvoudig, $z = 1$, $z = -1$, $z = i$ f. tweevoudig, $z = -i$ (ook tweevoudig)
- 3.11 a. $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ b. $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$

Antwoorden

c. $z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z - 1)(z + 1)$ d. $z^3 + 27 = (z + 3)(z^2 - 3z + 9)$
e. $z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$ f. $z^4 - 2z^2 + 1 = (z - 1)^2(z + 1)^2$

3.12 Als je $p(x)$ op de aangegeven wijze schrijft, zie je dat $p(x)$ voor grote *positieve* x -waarden vrijwel gelijk is aan x^n , en dus ook positief is. Ook voor grote *negatieve* x -waarden is $p(x)$ vrijwel gelijk aan x^n , maar x^n is dan negatief (want n is oneven). We zien dus dat $p(x)$ voor grote negatieve x -waarden negatief moet zijn, en voor grote positieve x -waarden positief. Daartussen moet $p(x)$ dus minstens één maal nul worden. Degenen die bedreven zijn in limieten, kunnen het bovenstaande als volgt nader preciseren : er geldt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = 1$$

en evenzo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{x^n} = 1$.

4. Lineaire recursies

- 4.1 a. kar. vgl.: $\alpha^2 - 0.5\alpha - 0.83 = 0$, $D = 3.57$, $\alpha_1 = 1.1947$, $\alpha_2 = -0.6947$
b. kar. vgl.: $\alpha^2 - 0.5\alpha - 0.3 = 0$, $D = 1.45$, $\alpha_1 = 0.8521$, $\alpha_2 = -0.3521$
c. kar. vgl.: $\alpha^2 + 0.5\alpha - 0.3 = 0$, $D = 1.45$, $\alpha_1 = 0.3521$, $\alpha_2 = -0.8521$
d. kar. vgl.: $\alpha^2 + 2\alpha + 1.13 = 0$, $D = -0.52$, $\alpha_1 = -1 + 0.3606i$, $\alpha_2 = -1 - 0.3606i$

4.2 a. Omdat niet de waarden x_k maar de waarden $y_k = \log x_k$ in de grafiek zijn gezet, zijn de schaalwaarden op de verticale as niet $0, 1, 2, \dots$ genoemd, maar $1 (= 10^0), 10, 10^2, \dots$. Een punt $(k, \log x_k)$ met bijvoorbeeld $x_k = 1000$ ligt dan ook op de horizontale lijn met schaalwaarde $10^3 = 1000$.

b. De horizontale lijnen zijn getekend op hoogte $\log 1 = 0, \log 2, \log 3, \dots, \log 10 = 1, \log 20, \log 30, \dots, \log 100 = 2, \log 200, \log 300 \dots$

c. Omdat x_k op den duur vrijwel gelijk is aan $A_1 \alpha_1^k$ is y_k dan vrijwel gelijk aan $\log(A_1 \alpha_1^k) = \log A_1 + k \log \alpha_1$. Dit is van de vorm $y = a + bk$ met $a = \log A_1$ en $b = \log \alpha_1$ en dus liggen die punten op een rechte lijn.

d. Zie onderdeel (c). Hier is $A_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ en $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dus $\log A_1 \approx -0.1405$ en $\log \alpha_1 \approx .2090$. Bedenk bij het controleren dat de schalen op de horizontale as en de verticale as niet gelijk zijn!

4.3 a. $y_{k+1} = \frac{2}{5} \sqrt{5} y_k - y_{k-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

b. $f(t) = \cos(\varphi t) - \sin(\varphi t)$

c. $f(t) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cos(\varphi t) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin(\varphi t) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos(\varphi t) - \sin \frac{\pi}{4} \sin(\varphi t) \right) = \sqrt{2} \cos \left(\varphi t + \frac{\pi}{4} \right)$. Er geldt dus $A = \sqrt{2} \approx 1.4142$, $\nu = \frac{\varphi}{2\pi} \approx 0.1762$, $\chi = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$. De periodelengte $T = \frac{1}{\nu} \approx 5.6751$ is bijna 6, zoals ook in de figuur te zien is.

4.4 $A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) = \frac{1}{2}(1 + i)$, $A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) = \frac{1}{2}(1 - i)$

4.5 a. $r = \sqrt{5}$, $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{1}{2}$, $\varphi = \arctan 2$, $c = \frac{1}{4}\sqrt{5}$, $\chi = \arctan \frac{1}{2}$

b. $r = \sqrt{5}$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $\varphi = \arctan 2$, $c = \frac{1}{2}$, $\chi = 0$

c. $r = \sqrt{5}$, $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $\varphi = \arctan 2$, $c = \frac{1}{4}$, $\chi = -\frac{\pi}{2}$

d. $r = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = -\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $c = 1$, $\chi = \frac{\pi}{3}$

e. $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $C_1 = 1$, $C_2 = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\chi = -\arctan 3$

4.6 $x_2 = 199.75$, $x_3 = 149.75$, $x_4 = 99.8025$. Verder geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0$ en $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2^k} = 0$ dus ook $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.

4.7 a. $x_k = -\frac{1}{2}k(-2)^k$ b. $x_k = 2^k - k2^k$ c. $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k + k\left(\frac{1}{2}\right)^k$

d. $x_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k + k\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ e. $x_k = 10(-1)^k - 11k(-1)^k$

4.8 a. $x_k = \frac{1}{2}3^k - \frac{1}{2}(-1)^k$ b. $x_k = -2\left(2^k\right) + 3$ c. $x_k = \frac{1}{3}(\sqrt{13})^k \sin(k\varphi)$ met $\varphi = \arctan \frac{3}{2}$ d. $x_k = (\sqrt{5})^k \left(2 \cos(k\varphi) - \frac{3}{2} \sin(k\varphi)\right)$ met $\varphi = \arctan 2$

e. $\alpha = 1$ is zelfs een drievoudige wortel van de karakteristieke vergelijking, dus de algemene oplossing is van de vorm $x_k = A + Bk + Ck^2$. Invullen van $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ geeft een stelsel met als oplossing $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$ zodat $x_k = 1 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k^2$.

5. Lineaire differentiaalvergelijkingen

5.1 a. kar. vgl.: $\lambda^2 + 1.1\lambda + 0.1 = 0$, $D = 0.81$, $\lambda_1 = -0.1$, $\lambda_2 = -1$

b. kar. vgl.: $\lambda^2 + 0.9\lambda - 0.1 = 0$, $D = 1.21$, $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = -1$

c. kar. vgl.: $\lambda^2 + 0.7\lambda + 0.1225 = 0$, $D = 0$, $\lambda = -0.35$

d. kar. vgl.: $\lambda^2 - 0.12\lambda + 4 = 0$, $D = -15.9856$, $\lambda_1 = 0.06 + 1.9991i$, $\lambda_2 = 0.06 - 1.9991i$

5.2 a. $y(t) = -e^{-t}$ b. $y(t) = e^{-2t} - 2e^{-t}$ c. $y(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}$

d. $y(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$ e. $y(t) = -12e^{-\frac{1}{2}t} + 12e^{-\frac{1}{3}t}$

5.3 a. $y(t) = e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}te^{\frac{1}{2}t}$ b. $y(t) = -e^{-3t} - 2te^{-3t}$ c. $y(t) = te^{-t}$

d. $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ e. $y(t) = e^t - te^t$

5.4 a. $y'(t) = pe^{pt}z(t) + e^{pt}z'(t)$, $y''(t) = p^2e^{pt}z(t) + 2pe^{pt}z'(t) + e^{pt}z''(t)$

b. Invullen. c. Delen door e^{pt} (dit is ongelijk aan nul voor alle t)

d. Uit $z''(t) = 0$ volgt $z'(t) = A_2$ voor zekere constante A_2 en hieruit volgt $z(t) = A_2t + A_1$ voor zekere constante A_1 .

e. Invullen in $y(t) = e^{pt}z(t)$.

5.5 a. $y(t) = e^t(-\cos(2t) + \sin(2t))$ b. $y(t) = e^{-t}(-\cos(t) - \sin(t))$

c. $y(t) = e^{-2t}(\cos(t) + 3\sin(t))$ d. $y(t) = e^t \cos(3t)$ e. $y(t) = e^{-2t} \sin(2t)$

5.6 a. $A_1 = \frac{1}{2}(-1 - i)$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\chi = \arg A_1 = \frac{5\pi}{4}$ dus $y(t) = \sqrt{2}e^t \cos(2t + \frac{5\pi}{4})$

b. $A_1 = \frac{1}{2}(-1 + i)$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\chi = \arg A_1 = \frac{3\pi}{4}$ dus $y(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(t + \frac{3\pi}{4})$

c. $A_1 = \frac{1}{2}(1 - 3i)$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\chi = \arg A_1 = -\arctan 3$ dus $y(t) = \sqrt{10}e^{-2t} \cos(t - \arctan 3)$

d. $A_1 = \frac{1}{2}$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}$, $\chi = \arg A_1 = 0$ dus $y(t) = e^t \cos(3t)$

e. $A_1 = -\frac{1}{2}i$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}$, $\chi = \arg A_1 = -\frac{\pi}{2}$ dus $y(t) = e^{-2t} \cos(2t - \frac{\pi}{2})$

5.7 Massaveersysteem met wrijving nul: $mu''(t) + ku = 0$. $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ dus $p = 0$ en $q = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Algemene oplossing: $u(t) = 2r \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \chi\right)$. Frequentie $\frac{q}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Antwoorden

$$\text{Amplitude } A = 2r = 2\sqrt{u(0)^2 + \frac{m}{k}u'(0)^2}$$

Stroomkring met weerstand nul: $LCv''(t) + v = 0$. $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{1}{LC}}$ dus $p = 0$ en $q = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Algemene oplossing: $v(t) = 2r \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t + \chi\right)$. Frequentie $\frac{q}{2\pi} = \frac{\sqrt{LC}}{2\pi}$. Amplitude

$$A = 2r = 2\sqrt{v(0)^2 + \frac{1}{LC}v'(0)^2}$$

5.8 Massaveersysteem: karakteristieke vergelijking: $m\lambda^2 + d\lambda + k = 0$. Als $D > 0$ zijn de beide wortels negatief want $\lambda_1\lambda_2 = \frac{k}{m} > 0$ en $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{d}{m} < 0$. De beide basisoplossingen zijn dus *dalende* e-machten en dus geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$. Als $D = 0$ is $\lambda = -\frac{d}{2m} < 0$ en dan geldt dus ook voor de beide basisoplossingen dat ze naar nul gaan als t naar oneindig gaat. Als $D < 0$ is $p = -\frac{d}{2m} < 0$. De algemene oplossing is dan het product van een sinusoïde en een *dalende* e-macht (gedempte trilling), en ook dan is de limiet nul als t naar oneindig gaat.

Bij stroomkringen verloopt de redenering analoog.

5.9 a. $y(t) = e^{-2t}(\cos(t) + 4\sin(t))$ b. $y(t) = e^{-t}(-1 - t)$

c. $y(t) = \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)$ d. $y(t) = \frac{1}{7}e^{4t} - \frac{1}{7}e^{-3t}$ e. $y(t) = -3e^{-4t} + 4e^{-3t}$

f. $y(t) = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t})$

g. $y(t) = \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^t(-\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t))$

Trefwoordenregister

- (r, φ) -notatie, 19, 22
 abc -formule, 5, 31, 32, 39, 47
 k -voudig nulpunt, 31, 34
 n -degraadspolynomen, 29, 34
 n -degraadsvergelijking, 31, 34
 n -demachtswortels, 25, 29, 34
- absolute waarde, 7, 9, 10, 22
afgeleide, 69
afgeleide functie, 69
algemene oplossing, 43, 45, 52, 61, 63, 64
amplitude, 42
arctangens-functie, 19
argument, 15, 22
- basisoplossingen, 43
basisoplossingsfuncties, 63, 64
basisoplossingsrijen, 41, 49, 52
beginvoorwaarden, 63
booglengte, 65
- cirkel, vergelijking van een cirkel, 13
coëfficiënten, 31, 34
complexe vlak, 7
continu exponentieel groeimodel, 54, 55
cosinus, 66
cosinusfunctie, 21, 22, 67
- decimale punt, iii
derdegraadsvergelijking, 29, 32
derdemachtswortel, 25
discreet logistisch groeimodel, 37
differentiaalvergelijking, 55
discreet exponentieel groeimodel, 36, 37
discreet logistisch groeimodel, 36
discriminant, 5, 31, 39, 57, 61
draaiingshoek, 65, 66
- e, 68
- e-machtfunctie, 21, 22, 68
eenheidscirkel, 15, 65
Euler, formules van Euler, 17
Euler, Leonhard, 17
exponentiële functies, 68
- factorstelling, 31, 34
fasehoek, 42
Fibonacci, 37, 40, 41, 49
formules van Euler, 17, 22
frequentie, 42
- Gauss, Carl Friedrich, 31
geconjugeerde van een complex getal, 9, 10
gedempte trilling, 54, 55
graad, 31, 34
graad (hoekmaat), 65
graden, 65
Griekse alfabet, iv
- harmonische trilling, 63
hoofdstelling van de algebra, 31
- imaginair, 5
imaginaire as, 7, 10
imaginaire deel, 7, 10
imaginaire e-macht, 17
imaginaire getallen, 7, 10
- karakteristieke vergelijking, 39, 47, 49, 52, 57, 59, 61, 63, 64
- lineair polynoom, 31
lineaire combinatie, 57, 63
lineaire differentiaalvergelijkingen, 55, 57, 63, 64
lineaire recurrente betrekking, 39, 49, 52

Trefwoordenregister

- lineaire vergelijking, 31
- massa-veersysteem, 54, 55, 63
- middelpuntshoek, 65
- modulus, 7, 10, 22
- multipliciteit, 31, 34, 63

- Newton, 55
- nulpunt, 31

- omtrek van een cirkel, 65
- oplossingsfunctie, 57, 63
- oplossingsrij, 49

- parallellogramconstructie, 13, 22
- polaire notatie, 19, 22
- polynoom, 31, 34
- poolcoördinaten, 19

- raaklijn, 69
- radiaal (hoekmaat), 65
- radialen, 15, 65
- reëel polynoom, 33
- reële as, 7, 10
- reële deel, 7, 10
- recurrente betrekking, 37
- recursieve definitie, 37
- richtingscoëfficiënt, 69
- rij van Fibonacci, 37, 40, 41, 49

- sinus, 66
- sinusfunctie, 21, 22, 67
- sinusoïde, 42, 63
- staartdeling, 30
- startwaarden, 49, 52, 64
- stroomkring, 55, 63
- superpositiebeginsel, 39

- tangens, 66
- tangensfunctie, 67
- toegevoegd complexe getal, 9, 10
- tweedegraadsvergelijking, 31

- variabele, 31, 34
- vector, 13, 22
- veelterm, 31
- vergelijking van een cirkel, 13
- vertakkingspunt, 27
- vierdegraadsvergelijking, 32

- vierkantsvergelijking, 5, 31
- voerstraal, 15, 19

- wortel, 31
- wortelparadox, 4